Joh. Chr. Walberer's
Anfangsgründe der Mechanik
fester Körper

mit

vielen Uebungsaufgaben

zum

Schulgebrauche
an Gymnasien und verwandten Lehranstalten

neu bearbeitet von

Dr. Georg Recknagel,
Professor am K. Gymnasium zu Passau, korrespondierendem Mitgliede der
K. B. Akademie der Wissenschaften.

Sechste Auflage.

München
Theodor Ackermann
Königlicher Hof-Buchhändler.
1889.

Druck von C. Brügel und Sohn.

Vorwort zur sechsten Auflage.

Die Anfangsgründe der Mechanik sind ungefähr in dem Umfange, in welchem sie hier behandelt werden, in den beiden obersten Klassen der bayerischen Gymnasien zu lehren, nachdem der Unterricht in Stereometrie und Trigonometrie vorausgegangen ist.

Die Unterstützung des Unterrichts durch den Versuch, so wünschenswert sie wäre, darf nicht unbedingt vorausgesetzt werden, da zur Zeit noch die wenigsten unserer Gymnasien experimentelle Hilfsmittel besitzen. Darin liegt einer der Gründe, die mich bestimmt haben, die theoretischen Beweise der ersten statischen Sätze beizubehalten und weiter auszubilden. Es kommt aber noch ein allgemeinerer Gesichtspunkt hinzu, von welchem aus der theoretische Beweis selbst dann bedeutungsvoll erscheint, wenn alle Apparate zur Darstellung und Messung zu Gebote stehen. Dieser Gesichtspunkt ist der wissenschaftliche.

Obwohl nämlich der Versuch die reine Erfahrung darstellt, welche immer die oberste Richterin in natürlichen Angelegenheiten bleiben wird, so darf ihm doch nicht die Bedeutung beigelegt werden, als ob er allein imstande wäre, endgiltig einen Satz zu beweisen, wie es z. B. der Lehrsatz vom Parallelogramm der Kräfte ist. Dieser Satz soll einerseits einen Pfeiler der ganzen Statik bilden, andererseits ist er nicht einfach genug, um ohne weiteres als Grundsatz hingenommen werden zu können. Es ist also eine Forderung der wissenschaftlichen Methode, daß der Satz vom Parallelogramm der Kräfte auf einfachere Sätze

zurückgeführt werde, welche vermöge dieser ihrer Einfachheit sich zu Grundsätzen eignen. Eben dieses nennt man aber beweisen. Indem dann der Versuch in einer Reihe einzelner Fälle die erwarteten Resultate gibt, bestätigt er die einfachen Grundsätze, durch deren Anwendung jene Resultate vorausgesagt werden konnten, ohne indessen weitere Bestätigungen überflüssig zu machen.

Ein solcher Grundsatz ist der in § 22 gegebene, daß die Resultante zweier Kräfte an einem Punkte der Größe und relativen Richtung nach durch die Kräfte selbst und den von ihnen eingeschlossenen Winkel eindeutig bestimmt ist.

Wird dieser Satz nicht anerkannt, dann ist es nicht erlaubt, eine Kraft, von welcher man weiß, daß sie einmal Resultante zweier Komponenten von bestimmter Größe und bestimmten Winkelabweichungen war, in einem anderen Falle wieder durch zwei Kräfte von eben dieser Größe und den gleichen Winkelabweichungen zu ersetzen, und der hier gegebene Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte ist hinfällig.

Es ist aber der genannte Grundsatz aus allgemein logischen Gründen anzuerkennen, da bei Annahme eines gleichen Angriffsobjektes außer der Größe der beiden Kräfte und deren Winkelabweichung weitere Merkmale nicht vorhanden sind, aus welchen ein Einfluß auf die Resultante abgeleitet werden könnte. Was sich von einem Falle zum anderen ändern kann, ist die Lage des materiellen Punktes, auf welchen der Angriff erfolgt, sowie die absolute Richtung der Kräfte im Raume. Beide Veränderungen können aber ohne irgend welchen mechanischen Eingriff, durch bloße Verlegung und Drehung des Koordinatensystems, rückgängig gemacht werden, sind also in mechanischer Beziehung belanglos.

Im Übrigen ist die Statik nicht unwesentlich umgestaltet und zwar im Sinne möglichster Vereinfachung. Zugleich schien es leicht ausführbar, diese Disziplin vollständig abzuschließen (§ 52—§ 55).

Will der Lehrer die Statik auf Kräfte beschränken, deren Richtungen in einer Ebene liegen, dann wird er diese §§ übergehen.

Auch die Dynamik konnte vereinfacht und etwas erweitert werden. Hinsichtlich der Behandlung des mathematischen Pendels schien es passend, bei dem Übergange von der Geschwindigkeit zur Zeit die unvermeidliche Ungenauigkeit auf die Ersetzung des Sinus durch den Winkel und die äquivalente Ersetzung des Cosinus durch 1 zu beschränken, diese aber vollständig durchzuführen.

Undefinierte Kürzungen dürften auch dann von zweifelhaftem Werte sein, wenn sie näher an das anderweitig bekannte genaue Resultat führen.

Die Aufgaben wurden sämtlich revidiert und auf ihre Lösbarkeit geprüft, einige wenige durch neue ersetzt.

In dieser Weise war ich nach Kräften bestrebt, den Wert des vorliegenden Lehrmittels zu erhöhen, und empfehle dasselbe den Kollegen zur geneigten Würdigung.

Passau im Dezember 1888.

G. Recknagel.

Inhalt.

Einleitung. Grundbegriffe.

§ 1. **Unsere Vorstellung von der mechanischen Beschaffenheit der Körper.** Um uns die physikalischen Eigenschaften der Körper zu erklären, nehmen wir an, daß dieselben aus Molekülen (Massenteilchen, materiellen Punkten) zusammengesetzt sind. Größe und Form der Moleküle sind uns unbekannt, wir denken sie uns sehr klein (kleiner als 0,0001 mm) und von einander durch Zwischenräume getrennt. Die gegenseitigen Abstände der Moleküle eines Körpers können durch natürliche Vorgänge verändert werden. Will man von dieser Veränderlichkeit absehen, also die Betrachtung auf den Fall beschränken, daß die Moleküle des Körpers ihre gegenseitige Lage und Entfernung unverändert beibehalten, dann pflegt man den Körper ein starres System zu nennen.

Um geometrische Betrachtungen zuzulassen, setzt man wohl auch die Raumerfüllung als stetig voraus, indem man sich die Abstände der Moleküle gegenüber den Dimensionen des Körpers selbst verschwindend klein denkt. Unter dem Volumen eines Körpers versteht man das durch seine äußersten materiellen Punkte bestimmte Polyeder.

§ 2. **Lage, Ruhe und Bewegung.** Die Lage eines Moleküls wird wie die eines Punktes nach den Methoden der Geometrie bestimmt, z. B. dadurch, daß man den Abstand desselben von drei einander rechtwinkelig schneidenden Ebenen angibt, welche man nach eigenem Gutdünken durch einen Punkt des Raumes gelegt hat.

Man sagt von einem materiellen Punkte, er sei in Ruhe,

wenn er seine Lage beibehält, er sei in Bewegung oder er bewege sich, wenn er seine Lage (Koordinaten) stetig ändert.

Da die Lage etwas Relatives ist, so sind auch die Begriffe Ruhe und Bewegung relativ, d. h. ein Molekül kann bezüglich eines gewissen Systems von Ebenen in Ruhe sein, während es gleichzeitig bezüglich eines anderen Systems in Bewegung ist. So kann ein im Zimmer befindlicher materieller Punkt seine Lage gegen drei in einer Zimmerecke zusammenstoßende Wände beibehalten, und doch als bewegt erkannt werden, wenn man seine Lage auf ein durch den Mittelpunkt der Sonne gelegtes Koordinatensystem bezieht.

Die Annahme eines absoluten Ruhezustandes ist für kein Molekül erfahrungsgemäß. (*Πάντα ῥεῖ.*)

§ 3. **Geschwindigkeit. Trägheitsgesetz. Kräfte.** Ein in Bewegung begriffener Körper besitzt Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit ist das eigene Bewegungsvermögen des Körpers. Ihre Merkmale sind Richtung und Größe. Die augenblickliche Richtung der Geschwindigkeit eines Moleküls wird angegeben durch einen Strahl der Tangente, welche man in dem Punkte, in welchem sich das Molekül gerade befindet, an seine Bahnlinie legt. Die augenblickliche Größe der Geschwindigkeit wird gemessen durch die Wegstrecke, welche das Molekül, frei von äußerer Einwirkung, in der folgenden Zeiteinheit zurücklegt.

Kein Molekül kann aus sich selbst, ohne Einwirkung von außen, seine Geschwindigkeit ändern, behält dieselbe vielmehr der Richtung und Größe nach unverändert bei. (Trägheitsgesetz.)

Die Ursache, welche eine Veränderung in dem Bewegungszustande eines materiellen Punktes hervorbringen kann, heißt Kraft.

Jede einzelne Kraft wirkt erfahrungsgemäß in der Weise, daß sie der schon vorhandenen Geschwindigkeit des materiellen Punktes eine neue Geschwindigkeit von bestimmter Größe und Richtung hinzufügt.

Die Richtung dieser neuen Geschwindigkeit ist die Richtung der Kraft. Man vergleicht ferner die Kräfte ihrer Größe nach und schätzt diese nach der Größe der Geschwindigkeit, welche sie — eine Zeiteinheit hindurch wirksam — demselben materiellen Punkte (od. System materieller Punkte) verleihen.

Greift eine Kraft nur an einem der materiellen Punkte an, welche zu einem System (Körper) vereinigt sind, so heißt jener Punkt der Angriffspunkt der Kraft.

Demnach ist die gerade Linie (Strecke), welche von dem Angriffspunkte ausgehend sich in der Richtung der Kraft erstreckt und durch die Anzahl ihrer Längeneinheiten die Größe der Kraft ausdrückt, zur Darstellung einer Kraft vorzüglich geeignet.

§ 4. **Allgemeine Eigenschaften der Körper.** Die Körper besitzen gewisse physikalische Eigenschaften, deren Kenntnis zur Beurteilung der Kraftwirkungen nützlich ist.

1) die **Masse** eines Körpers kann in der Mechanik, welche von der chemischen Beschaffenheit (Qualität) der Körper absieht, als die Summe identischer materieller Punkte betrachtet werden, welche zu einem starren Systeme vereinigt sind. Da die Anzahl der materiellen Punkte, aus welchen ein Körper besteht, der Erfahrung nicht zugänglich ist, so sind wir zur Ermittelung des Größen-Verhältnisses von Massen auf die Beobachtung der Wirkungen angewiesen, welche Kräfte auf sie hervorbringen.

Verleiht eine Kraft P einem materiellen Punkte eine Geschwindigkeit a, so ist wohl eine zweite Kraft P nötig, um einem zweiten dem ersten völlig gleichen materiellen Punkte die gleiche Geschwindigkeit a zu verleihen, ebenso eine dritte . . . n$^{\text{te}}$ Kraft P, um dem dritten . . . . n$^{\text{ten}}$ identischen materiellen Punkte die Geschwindigkeit a zu erteilen. In dem Zusammenhange der materiellen Punkte kann kein Grund liegen, diese Beziehung zu ändern. Daraus folgt, daß die n=fache Masse der n=fachen Kraft bedarf, um die gleiche Geschwindigkeit zu erlangen, wie sie die einfache Masse

durch die einfache Kraft erhält, oder daß die Massen sich verhalten wie die Kräfte, welche ihnen gleiche Geschwindigkeit erteilen. Mittelst dieser Proportion kann man sowohl von einem bekannten Verhältnis von Kräften auf das unbekannte zweier Massen schließen als umgekehrt aus dem bereits bekannt gewordenen Verhältnisse zweier Massen, das unbekannte neuer Kräfte ermitteln.

2) Unter der (mittleren) **Dichtigkeit** eines Körpers versteht man die Masse, welche durchschnittlich in der Volumeneinheit desselben enthalten ist. Bezeichnet man mit D die Dichtigkeit, mit M die gesamte Masse, mit V das Volumen eines Körpers, so ist demnach

$$D = \frac{M}{V}.$$

Ist die Masse des Körpers über sein Volumen so verteilt, daß durchaus in gleichen Raumteilen gleichviel Masse enthalten ist, so heißt der Körper *gleichdicht* oder *homogen*.

3) **Porosität und Undurchdringlichkeit.** Unter den *Poren*, welche man den Körpern im allgemeinen zuschreibt, versteht man jene Zwischenräume zwischen den Molekülen, von welchen schon im § 1 die Rede war. Demnach ist die Porosität eine allgemeine Eigenschaft der Körper. In diese Poren können einzelne Moleküle anderer Körper eindringen. Daß denselben Raum, welchen ein Molekül einnimmt, nicht gleichzeitig auch ein anderes ausfüllen kann, ist wohl selbstverständlich. Nur in diesem Sinne gilt die *Undurchdringlichkeit*, welche man ebenfalls als eine allgemeine Eigenschaft der Körper aufzuführen pflegt.

4) **Kompressibilität und Elastizität.** An allen Körpern beobachtet man, daß sie dem Versuche ihr *Volumen* zu vermindern (sie zu konprimieren, zu verdichten), einen Widerstand entgegensetzen, welcher indessen nicht eher bemerkbar wird, als eine gewisse, wenn auch noch so ge=

ringe Verminderung des Volumens wirklich eingetreten ist. Die Körper sind also zusammendrückbar (kompressibel) und besitzen innere Kräfte, welche sie den äußeren Kräften, die ihre Molekularabstände vermindern, entgegensetzen. Diese inneren Kräfte nennt man elastische Kräfte.

Somit besitzen die Körper Zusammendrückbarkeit (Kompressibilität) und Elastizität als allgemeine Eigenschaften.

Die festen Körper insbesondere verteidigen durch elastische Kräfte nicht nur ihr Volumen sondern auch ihre Form.

Die elastischen Kräfte sind es, welche nach Beendigung der äußeren Einwirkung die Moleküle im allgemeinen wieder in die früheren Abstände, bei den festen Körpern überdies in die frühere gegenseitige Lage zurückführen.

Starre Systeme, wie wir sie in der Folge voraussetzen, würden dadurch entstehen, daß man den festen Körpern unendlich große elastische Kräfte beilegt.

§ 5. **Aufgabe der Mechanik.** Aus dem Begriffe der Kraft folgt, daß eine einzelne Kraft, welche auf ein starres System wirkt, eine Änderung in dem Bewegungszustande desselben hervorbringt. Soll der Bewegungszustand eines Körpers trotzdem unverändert bleiben, so müssen zu der ersten Kraft noch eine oder mehrere andere hinzukommen, welche die Wirkung der ersten Kraft hindern (aufheben) d. h. Gleichgewicht herstellen. Derjenige Teil der Mechanik, welcher die Bedingungen des Gleichgewichts untersucht, heißt Statik, während man mit dem Namen Dynamik (oder Kinematik) den anderen Teil der Mechanik bezeichnet, in welchem die von Kräften hervorgerufenen Änderungen des Bewegungszustandes beschrieben werden.

Erster Teil.

Statik.

Erstes Kapitel.

I. Erklärungen und Grundsätze.

§ 6. **Erklärung.** Man sagt von einem materiellen Punkte, er sei im Gleichgewicht, wenn er seinen Bewegungszustand unverändert beibehält.

Ein System materieller Punkte (Körper) ist im Gleichgewicht, wenn die einzelnen Punkte sich alle mit gleich großer gleich gerichteter (paralleler) Geschwindigkeit bewegen.

Der Fall der Ruhe ist ein Grenzfall, dadurch bestimmt, daß die Geschwindigkeit den Wert Null hat.

§ 7. **Erklärung.** Der Ausdruck: „Kräfte sind im Gleichgewicht oder halten sich das Gleichgewicht" soll bedeuten, daß der materielle Punkt, oder das System von materiellen Punkten, an welchem nur diese Kräfte allein angreifen, im Gleichgewicht ist.

§ 8. **Grundsatz.** Kräfte, welche sich das Gleichgewicht halten, üben keinerlei Einfluß auf die Wirkung anderer Kräfte, welche gleichzeitig mit ihnen an einem Systeme materieller Punkte thätig sind. Gleichgewicht und Veränderungen des Bewegungszustandes finden ebenso statt, wie wenn jene Kräfte überhaupt nicht vorhanden wären. Man sagt deshalb von solchen Kräften „sie heben sich auf" oder „sie annullieren sich". Kräfte, welche sich das Gleichgewicht halten, können demnach zum Zwecke einer Erläuterung oder Beweisführung hinzugedacht oder weggelassen werden.

§ 9. **Erklärung.** Wirken gleichzeitig mehrere Kräfte auf einen materiellen Punkt, so wird im allgemeinen von diesem

Zusammenwirken eine Geschwindigkeit von bestimmter Größe und Richtung zu erwarten sein, welche sich der etwa schon vorhandenen Geschwindigkeit des Punktes beigesellt. Der besondere Fall des Gleichgewichts tritt ein, wenn die neue durch das Zusammenwirken der Kräfte entstehende Geschwindigkeit Null ist. Da aber jede der Kräfte ihrer Natur nach (§ 3) eine Geschwindigkeit von bestimmter Größe und Richtung erzeugt, so ist Gleichgewicht als Resultat des Zusammenwirkens mehrerer Kräfte nur dann denkbar, wenn es möglich ist, daß Geschwindigkeiten von bestimmter Größe und Richtung, welche gleichzeitig demselben Moleküle erteilt werden, einander aufheben oder annullieren.

Wir nehmen an, daß zwei Geschwindigkeiten von gleicher Größe und entgegengesetzter Richtung einander aufheben und induzieren hieraus den folgenden

§ 10. **Grundsatz.** Zwei Kräfte sind an einem materiellen Punkte im Gleichgewicht, wenn sie der Größe nach gleich, der Richtung nach einander entgegengesetzt sind.

Da wir solche Kräfte als gleich groß definiert haben, welche derselben Masse in gleichen Zeiten gleich große Geschwindigkeiten erteilen, so könnte der aufgestellte statische Satz als eine selbstverständliche Folge der vorausgehenden Annahme erscheinen.

Es ist indessen immerhin etwas neues, die Kräfte selbst an die Stelle der möglichen (virtuellen) Geschwindigkeiten zu setzen.

Durch diese Hypothese wird die Verbindung zwischen Statik und Dynamik hergestellt und die Einheit in der Definition der Kraft gewahrt. Sie erwartet wie alle naturwissenschaftlichen Hypothesen ihre Bestätigung durch die Erfahrung, welche in dem Nachweise bestehen kann, daß Kräfte, welche sich das Gleichgewicht halten, in gleichen Zeiten derselben Masse gleich große Geschwindigkeiten verleihen und umgekehrt.

§ 11. **Lehrsatz.** Sind zwei Kräfte an einem Punkte im Gleichgewicht, so sind sie der Größe nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt.

Erläuterung. Es wird behauptet, daß zwei ungleiche Kräfte oder solche Kräfte, deren Richtungen einen von 180° verschiedenen Winkel mit einander bilden, nicht im Gleichgewicht sind.

Beweis. a) Wäre ein Punkt, an welchem zwei ungleiche entgegengesetzte Kräfte angreifen, im Gleichgewicht, so müßte jede einzelne dritte Kraft, welche man hinzufügt, das Gleichgewicht des Punktes stören (§ 8). Wählt man aber die dritte Kraft von solcher Größe und Richtung, daß sie die kleinere der beiden Kräfte zur größeren ergänzt, so besteht nach § 10 Gleichgewicht. Die Annahme eines ursprünglichen Gleichgewichts würde demnach zu einem Widerspruch mit § 8 führen.

b) Würden zwei Kräfte, welche einen materiellen Punkt angreifen und einen von 180° verschiedenen Winkel mit einander bilden, im Gleichgewicht sein, so müßte eine dritte Kraft, welche man hinzufügt, nach § 8 dem Punkte Geschwindigkeit in ihrer Richtung erteilen. Wählt man nun diese dritte Kraft der ersten der beiden vorhandenen Kräfte gleich und entgegengesetzt, so würde die erste mit der dritten Kraft im Gleichgewicht sein und demnach die Einführung der dritten Kraft zur Folge haben, daß der Punkt Geschwindigkeit in der Richtung der zweiten Kraft erhält. Es ist also auch diese Annahme mit § 8 in Widerspruch.

§ 12. **Grundsatz.** Zwei Kräfte, welche an verschiedenen Punkten eines starren Systems angreifen, halten sich das Gleichgewicht, wenn sie gleich groß und in gerader Linie entgegengesetzt sind.

Erläuterung. Die beiden Kräfte würden den zwei materiellen Punkten A und B, an welchen sie angreifen, gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeiten verleihen, was eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Abstandes AB zur Folge hätte. Solche Veränderungen sind durch die Annahme der Starrheit des Systems ausgeschlossen. Daß die Strecke AB selbst und die übrigen mit dieser in starrer Verbindung voraus-

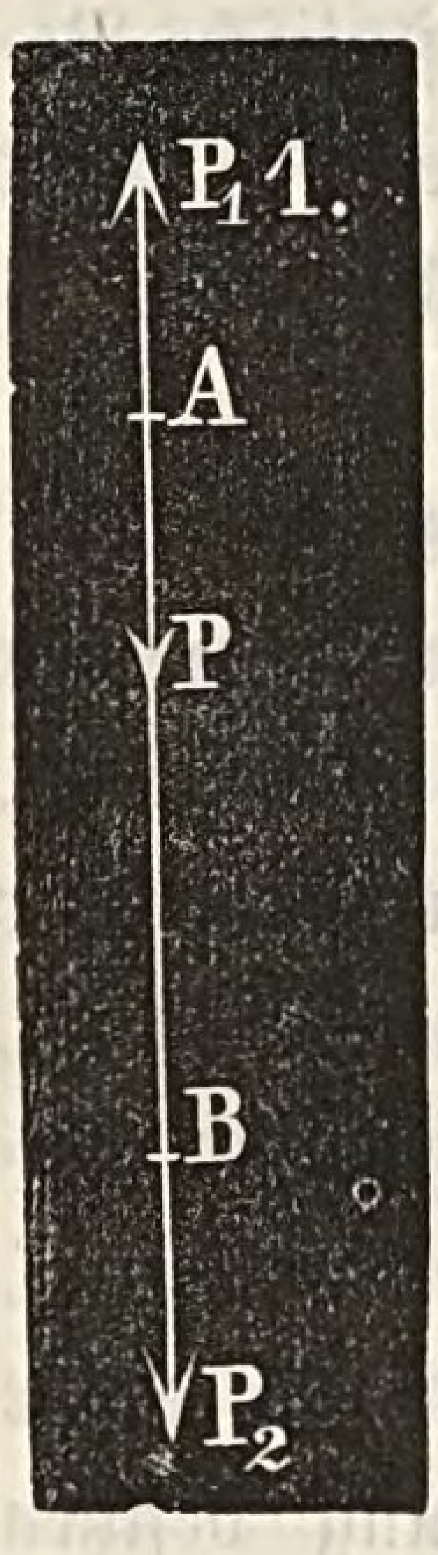
gesetzten Moleküle keine Geschwindigkeit erhalten, wird hier aus analogen Gründen wie in § 10 angenommen.

§ 13. **Lehrsatz.** Sind zwei Kräfte, welche an verschiedenen Punkten eines starren Systems angreifen, im Gleichgewicht, so sind die Kräfte gleich groß und in der geraden Linie ihrer Angriffspunkte einander entgegengesetzt.

Erläuterung. Es wird behauptet, daß zwei ungleiche Kräfte oder solche, deren Richtungen nicht in gerader Linie entgegengesetzt sind, nicht im Gleichgewicht sein können. Der Beweis wird ebenso geführt wie in § 11.

§ 14. **Lehrsatz.** Innerhalb eines starren Systems materieller Punkte kann man eine Kraft durch eine andere ersetzen von gleicher Größe und Richtung, welche an einem anderen Punkte ihrer Richtungslinie angreift. (Man kann den Angriffspunkt einer Kraft in ihrer Richtungslinie vorwärts oder rückwärts verlegen.)

Beweis. (Fig. 1.) Um zu zeigen, daß der Angriffspunkt der Kraft P von A nach B verlegt werden kann, bringt man in A und B die beiden der P gleichen einander entgegengesetzten Kräfte P_1 und P_2 an, welche nach § 12 unter sich im Gleichgewicht sind.



Das System der Kräfte hat nach § 8 die gleiche Wirkung wie die Kraft P allein. Andererseits heben sich nach § 10 die Kräfte P und P_1 auf, können also ohne Aenderung der Wirkung weggelassen werden. Somit bringt das nun übrige P_2 in B die gleiche Wirkung hervor wie P in A.

Ebenso läßt sich zeigen, daß der Angriffspunkt der Kraft P in der Geraden BA rückwärts verlegt werden kann.

§ 15. **Erklärung.** Wirken mehrere Kräfte P_1, P_2, P .... P_n auf ein starres System materieller Punkte, so ist es oft möglich, durch Einführung einer neuen Kraft R_1 Gleichgewicht herzustellen. In diesem Fall ist die gesamte statische

Wirkung der Kräfte (P) gleichwertig mit der statischen Wirkung einer einzelnen Kraft R, welche der R_1 gleich und in gerader Linie entgegengesetzt ist. Diese Kraft R, welche allein die statische Wirkung des Systems der Kräfte (P) hervorbringt, heißt die statische Resultante oder Mittelkraft der Kräfte (P), und diese Kräfte heißen ihre Komponenten oder Seitenkräfte.

Anmerkung. Aus dem Umstande, daß die Kräfte (P) durch die einzelne Kraft R_1 im Gleichgewicht gehalten werden, darf man nicht allgemein schließen, daß die dynamische Wirkung der Kräfte (P) darin besteht, eine Geschwindigkeit zu erzeugen, welche der von R_1 erzeugten gleich und entgegengesetzt ist. Vielmehr ist zur Ermittelung der dynamischen Wirkung eines Kraftsystems eine besondere Untersuchung nötig.

§ 16. **Lehrsatz.** Sind an einem starren System materieller Punkte die Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots . P_n$ im Gleichgewicht, so ist jede einzelne dieser Kräfte der statischen Resultante der übrigen (n — 1) Kräfte gleich und in gerader Linie entgegengesetzt.

Beweis. Daß je (n—1) der Kräfte eine statische Resultante haben, folgt aus der Möglichkeit, durch die n^{te} Kraft Gleichgewicht herzustellen; das übrige aus § 11 und § 13.

II. Kräfte, welche an einem Punkte angreifen.

§ 17. **Grundsatz.** Kräfte, welche an einem einzelnen materiellen Punkte angreifen, haben stets eine statische Resultante.

Der Satz behauptet, daß es stets eine Kraft von bestimmter Größe und Richtung gibt, durch welche ein materieller Punkt, der von beliebigen Kräften angegriffen ist, im Gleichgewicht gehalten werden kann. Derselbe ergibt sich aus der Erwägung, daß ein einzelner materieller Punkt in jedem Momente nur eine Geschwindigkeit von bestimmter Größe und Richtung besitzen kann. Somit kann auch aus dem Zusammenwirken mehrerer Kräfte nur eine Geschwindigkeit des Punktes hervorgehen. Diese kann aber auch durch eine einzelne Kraft von geeigneter Größe und Richtung erzeugt und durch die ihr gleiche und entgegengesetzte vernichtet werden.

Im Gegensatze hiezu läßt sich der Satz von einem starren Systeme materieller Punkte nicht behaupten, da verschiedene Punkte eines solchen Systems ohne Aenderung ihrer Distanz verschiedene Geschwindigkeiten haben können.

§ 18. **Grundsatz.** (Addition von Kräften.) Wirken zwei Kräfte P_1, P_2 auf einen Punkt in derselben Richtung, so hat ihre Resultante die gleiche Richtung, und ihre Größe ist gleich der Summe $(P_1 + P_2)$.

Zusatz. Wirken beliebig viele Kräfte $(P_1, P_2, P_3 \ldots P_n)$ auf einen Punkt in derselben Richtung, so hat ihre Resultante die gleiche Richtung und ihre Größe ist gleich der Summe $(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots P_n)$.

Der Beweis des Zusatzes ergibt sich daraus, daß auf die Resultante der beiden Kräfte P_1 und P_2 und die Kraft P_3 der Grundsatz neuerdings angewendet werden kann u. s. w.

§ 19. **Lehrsatz.** (Subtraktion von Kräften.) Wirken zwei Kräfte $(P > Q)$ auf einen Punkt in entgegengesetzter Richtung, so hat ihre Resultante die Richtung der größeren Kraft (P) und die Größe $(P - Q)$.

Der Beweis ergibt sich mit Berücksichtigung der Erklärung des § 15 daraus, daß man nach der Richtung der kleineren Kraft Q die Kraft $(P - Q)$ hinzufügen (addieren) muß, um Gleichgewicht herzustellen.

Zusatz 1. Wirken an einem materiellen Punkte längs derselben Geraden die Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ zusammen mit den Kräften $Q_1, Q_2 \ldots Q_m$, wobei angenommen ist, daß die Kräfte (P) in einer, die Kräfte (Q) in der entgegengesetzten Richtung thätig sind, so wird man sich zunächst darüber schlüssig machen, welche Richtung man als die positive gelten lassen will. Hat man sich für die Richtung der (P) entschieden, dann sind die Kräfte (P) mit dem Vorzeichen (+) die Kräfte (Q) mit dem Vorzeichen (—) zu versehen, und die algebraische Summe

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots P_n - Q_1 - Q_2 \ldots - Q_m$$

gibt durch ihren Zahlenwert die Größe der Resultante und durch ihr Vorzeichen die Richtung derselben an. Resultiert eine Zahl

mit positivem Vorzeichen, so hat die Resultante die Richtung der (P), während ein negatives Vorzeichen andeutet, daß die Resultante in die Richtung der (Q) fällt.

Der Beweis ergibt sich leicht aus den vorausgehenden Sätzen.

Zusatz 2. Greifen die in Zus. 1 beschriebenen Kräfte nicht an dem nämlichen Punkte an, sondern an verschiedenen materiellen Punkten eines starren Systems, welche sämtlich in der nämlichen Geraden liegen, so gelten die gleichen Sätze, weil es (nach § 14) erlaubt ist, die Kräfte sämtlich an ein und denselben Punkt zu verlegen.

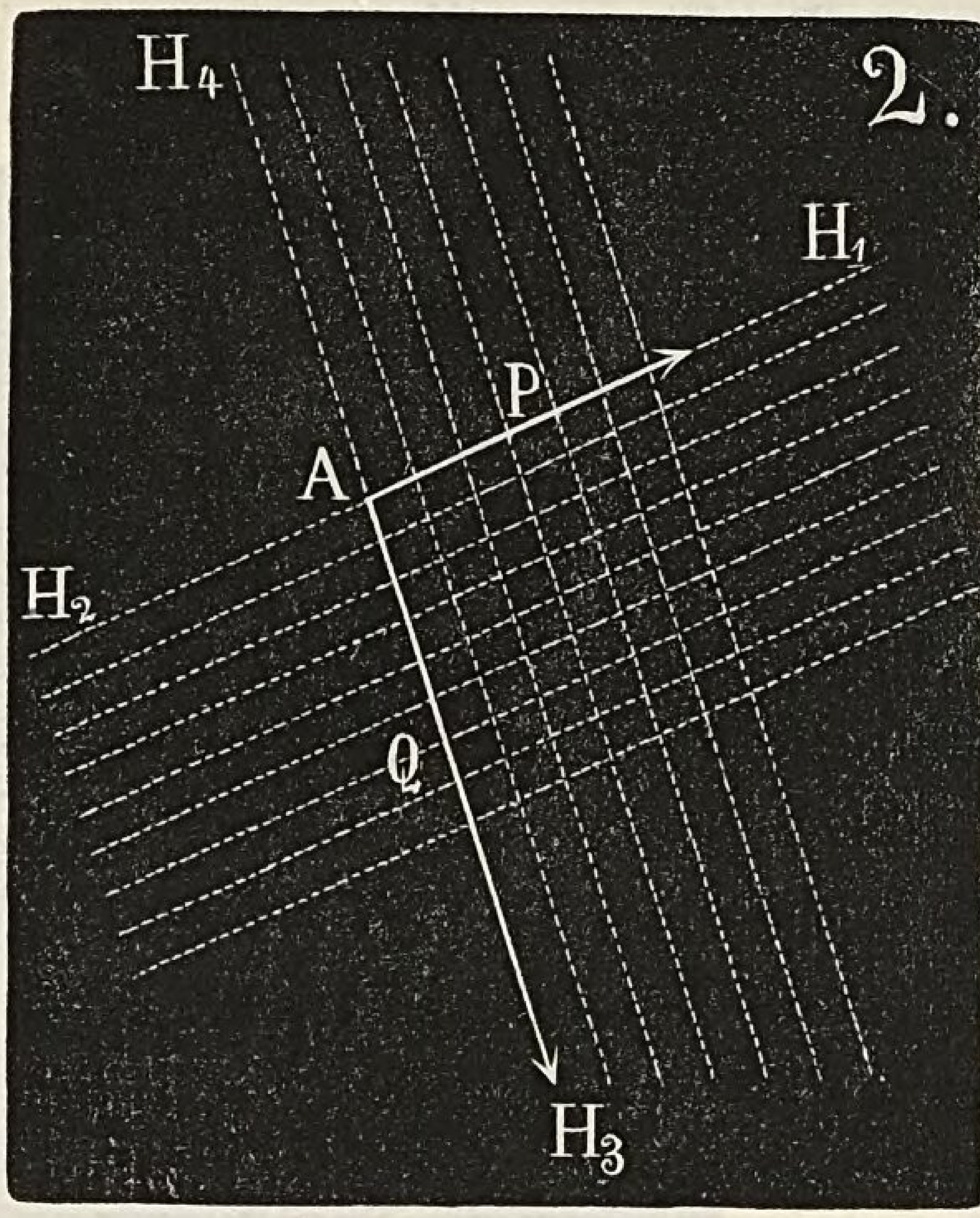
§ 20. **Lehrsatz.** Wirken zwei Kräfte an einem materiellen Punkte so, daß ihre Richtungen einen (von 0^0 und 180^0 verschiedenen) Winkel mit einander bilden, so liegt die Resultante in der Ebene, welche durch die Richtungen der Kräfte bestimmt ist.

Beweis. Die Ebene der Kräfte teilt den Raum in zwei kongruenten Halbräume, welche zu der Ebene symmetrisch liegen, also miteinander vertauscht werden können. Die Annahme, daß die Resultante in dem einen der beiden Halbräume liege, führt somit zu dem Schlusse, daß sie gleichzeitig auch in dem anderen liegt, was nur dadurch möglich ist, daß sie der Grenzebene selbst angehört.

§ 21. **Lehrsatz.** Die Resultante der beiden Kräfte P und Q, welche einen materiellen Punkt so angreifen, daß ihre Richtungen nicht in derselben Geraden liegen, liegt innerhalb des hohlen Winkels, welchen diese Kräfte einschließen.

Beweis. (Fig. 2) Die Gerade AQ, welche durch die Richtung der einen Kraft Q bestimmt ist, teilt die Ebene der Kräfte in zwei Halbebenen H_1 und H_2, von welchen eine die Resultante enthält. Fügt man eine dritte Kraft K hinzu, welche in der Grenzlinie AQ selbst der beiden Halbebenen wirkt, so muß die Resultante dieser drei Kräfte noch in derselben Halbebene liegen, in welcher die Resultante der zwei Kräfte P, Q liegt; denn da die Kraft K zu beiden Halbebenen symmetrisch liegt,

kann sie nicht bewirken, daß die Resultante aus der einen Halbebene in die andere übergeht. Wählt man nun K = Q und



diesem gerade entgegengesetzt, so ist P die Resultante der drei Kräfte P, Q, K und da P in der Halbebene H_1 liegt, so liegt auch die Resultante von P und Q in der Halbebene H_1.

Andererseits teilt die Gerade AP die Ebene in die beiden Halbebenen H_3 und H_4, und eine Kraft I = P, welche man in der Grenzlinie AP selbst dem P entgegenstellt, kann vermöge ihrer zu H_3 und H_4 symmetrischen Lage nicht bewirken, daß die Resultante aus der einen dieser Halbebenen in die andere übergeht. Somit liegt die Resultante der zwei Kräfte P, Q in derselben Halbebene, in welcher die Resultante Q der drei Kräfte P, Q, I liegt, nämlich in H_3. Da somit die Resultante der Kräfte P, Q sowohl in der Halbebene H_1 als in der Halbebene H_3 liegt, so liegt sie in dem gemeinsamen Teile dieser Halbebenen, d. h. in der Winkelebene PAQ.

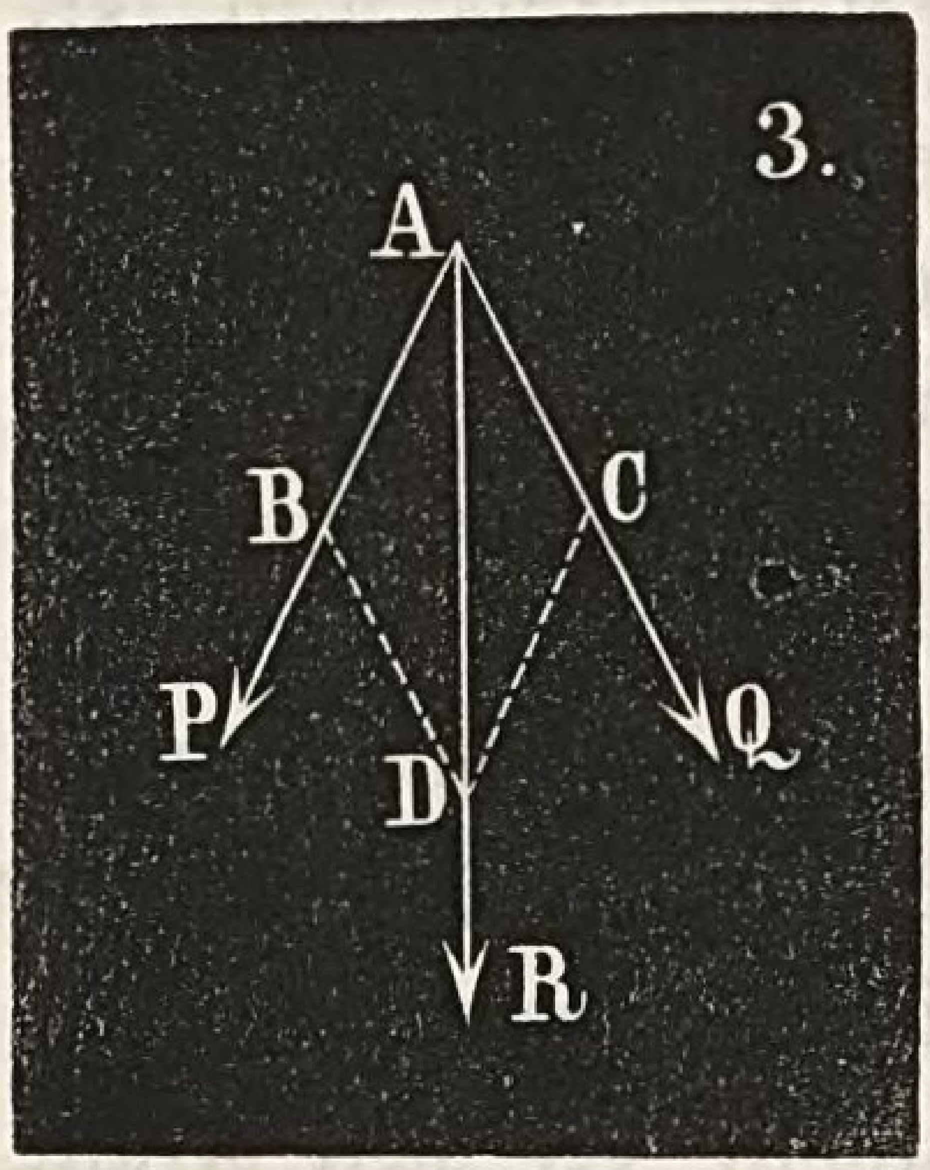
§ 22. **Grundsatz.** Greifen zwei Kräfte von der Größe P, Q so an einem materiellen Punkte an, daß ihre Richtungen den hohlen Winkel α einschließen, so ist die Resultante durch die Werte von P, Q und α der Größe und Lage nach eindeutig bestimmt.

Erläuterung. Ist in einem bestimmten Falle R die Größe der Resultante, und bildet ihre Richtung mit der Richtung der Kräfte P, Q beziehungsweise die Winkel β, γ (wobei nach § 21 $(\beta + \gamma) = \alpha$), so ist dieselbe Kraft (R, β, γ) auch in jedem anderen Falle die Resultante der Kräfte (P, Q, α), und man kann umgekehrt in Gleichgewichtsproblemen jederzeit die Kraft R durch zwei Kräfte P und Q ersetzen, welche mit der Richtung

von R beziehungsweise die Winkel β und γ bilden. Die Wahrscheinlichkeit dieser Hypothese folgt aus der Erwägung 1) daß die Kräfte, die an einem Punkte angreifen, nur eine Resultante haben und 2) daß die Merkmale einer Kraft auf Angriffspunkt, Größe und Richtung beschränkt sind.

§ 23. **Lehrsatz.** Sind die beiden Kräfte P, Q welche an einem materiellen Punkte angreifen, gleich groß, so halbiert die Resultante den hohlen Winkel, welchen ihre Richtungen einschließen.

Beweis. Fig. 3. Nach den Lehrsätzen 20 und 21 liegt die Resultante innerhalb des hohlen Winkels BAC der Kraftrichtungen.



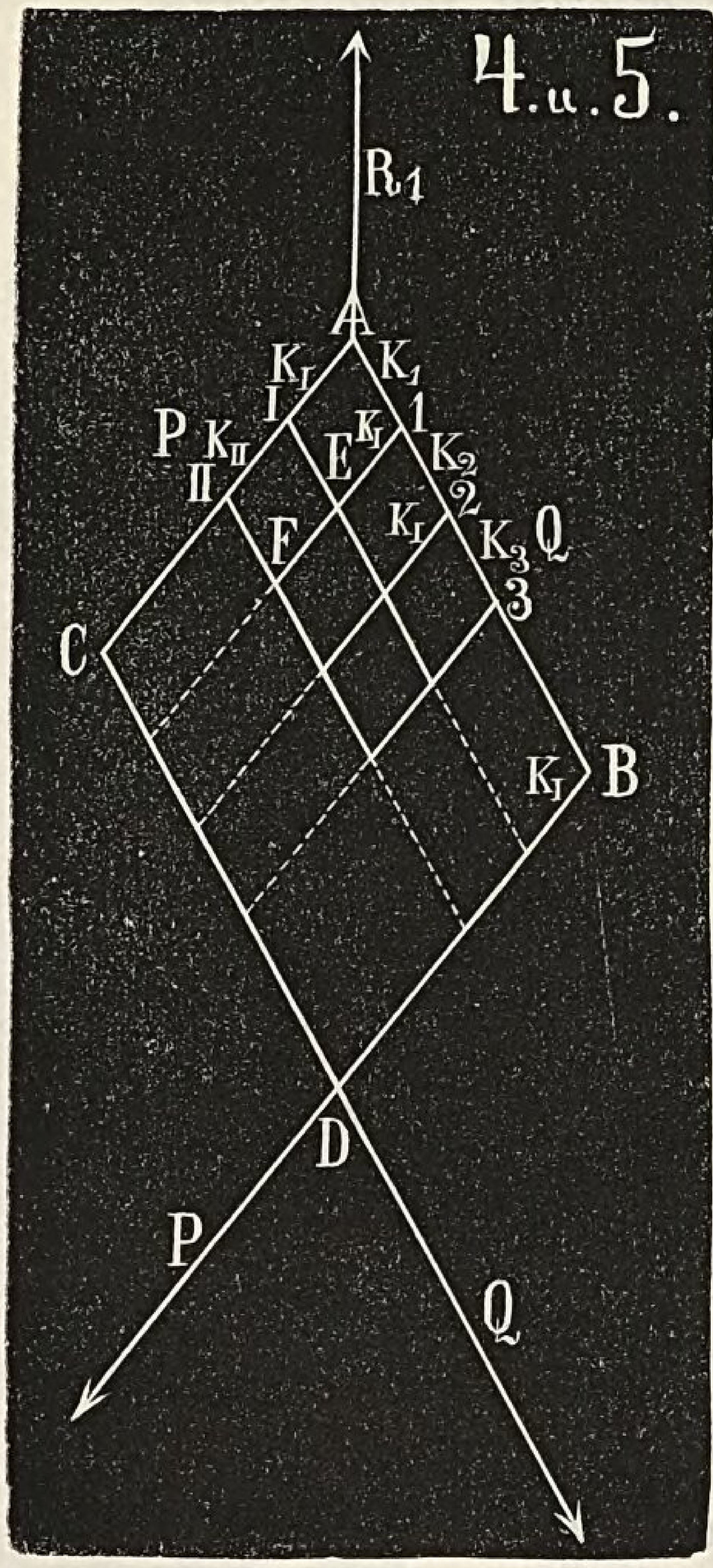
Folglich kann dadurch Gleichgewicht hergestellt werden, daß man eine dritte Kraft R_1 anbringt, deren Richtung im Scheitelwinkel von BAC liegt. Dieses Gleichgewicht wird nicht gestört, wenn man die beiden gleichen Kräfte Q und P mit einander vertauscht. Würde nun die Richtung von R_1 mit Q einen kleineren Winkel bilden als mit P, so würde sie nach dem Vertauschen der Kräfte umgekehrt mit Q einen größeren Winkel bilden als mit P. Da ferner die Resultante R der Kraft R_1 gerade entgegengesetzt ist, so würde der Winkel, den die Resultante R und die Kraft P bilden, sowohl kleiner als auch größer sein können wie die Hälfte von BAC, was gegen den Grundsatz § 22 verstößt. Es bildet also die Richtung von R_1 und somit auch die von R mit der Richtung der Kraft P und Q gleiche Winkel.

§ 24. **Lehrsatz.** (Kräfteparallelogramm.) Greifen zwei Kräfte P und Q den materiellen Punkt A so an, daß ihre Richtungen den hohlen Winkel α einschließen, so ist ihre Resultante der Richtung und Größe nach durch die Diagonale des Parallelogramms bestimmt, welches aus zwei den Kräften P und Q proportionalen Strecken und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel α konstruiert wird.

Der Beweis zerfällt in zwei Teile.

a) Richtung der Resultante.

Es seien AC und AB Strecken, welche so viele Längeneinheiten haben als die Kräfte P und Q Krafteinheiten, CAB



der Winkel, welchen die Richtungen der Kräfte einschließen, so soll zunächst bewiesen werden, daß der Endpunkt D des Parallelogramms ACDB ein Punkt in der Richtung der Resultante ist.

Man denkt sich das Gleichgewicht in A dadurch hergestellt, daß daselbst eine dritte Kraft R_1 wirkt, welche der Resultante R der beiden Kräften P und Q gleich und entgegengesetzt ist. Richtung und Größe von R_1 sind vorerst unbekannt. Es wird nun nachgewiesen werden, daß dieses Gleichgewicht nicht gestört wird, wenn man die Kräfte P und Q parallel mit ihrer ursprünglichen Richtung nach dem Endpunkte D der Diagonale verlegt, den man sich in starrer Verbindung mit A denken kann. Daraus folgt dann, daß die Resultante der in D angreifenden Kräfte P und Q der in A angreifenden R_1 in gerader Linie entgegengesetzt ist. Diese gerade Linie ist die durch die Punkte A und D bestimmte Diagonale. Da aber die Resultante R der in A angreifenden Kräfte (P und Q) der R_1 in gerader Linie entgegengesetzt ist, so liegt auch R in der Richtung der Diagonale AD.

Es ist noch übrig, den oben versprochenen Beweis zu führen, daß das im Punkte A zwischen R_1 P, Q bestehende Gleichgewicht nicht gestört wird, wenn man die Kräfte P und Q parallel mit sich nach D verlegt.

Haben die beiden Kräfte P und Q ein gemeinschaftliches Maß, d. h. gibt es eine Kraft K, welche ohne Rest zugleich p mal in P, und q mal in Q enthalten ist (P = pK, Q = qK), so kann man P als Summe von p gleichen Kräften (K) und Q als Summe von q ebenso großen Kräften betrachten und die Angriffspunkte der einzelnen Summanden an die Teilpunkte A, 1, 2, 3 .... A, I, II .... verlegen.

Nun halbiert die Resultante der Partialkräfte K'*) und K_I den Winkel bei A und kann somit an den Endpunkt E des Rhombus A1IE verlegt werden. Dort ersetzt man sie wieder durch ihre Komponenten und verlegt diese, K' nach I und K_I nach 1, damit sich dasselbe Verfahren jetzt im Punkte 1 auf die Partialkräfte K'' und K_I anwenden läßt. Hiedurch kommt K'' nach E und K_I nach 2.

Es wird nun das Verfahren im Punkte 2 auf K_I und K''' angewendet, wodurch K''' in die Parallele IE und K_I ebenfalls parallel mit seiner ursprünglichen Richtung nach 3 verlegt wird.

Durch Fortsetzung (q malige Anwendung) des Verfahrens ist endlich die ganze Kraft Q in die Parallele IE verschoben, zugleich ist die Partialkraft K_I parallel mit sich nach B gekommen, und kann demnach ohne weiteres nach D verlegt werden.

Man nimmt nun neuerdings das Verfahren am Punkte I auf, um die Kraft Q in die zweite Parallele IIF zu verschieben, wodurch dann zugleich die zweite Partialkraft K_{II} das P nach D kommt.

So gelangt schließlich (nach p maliger Anwendung) die Kraft Q in die Gerade CD und die letzte (p^{te}) Partialkraft der Kraft P nach D. Da nun auch Q längs CD nach D verlegt werden kann, so sind nun beide Kräfte P und Q in D, und zwar ohne Störung des Gleichgewichts, da die sämtlichen vorgenommenen Veränderungen nach den Prinzipien der Statik zulässig sind.

Haben die Kräfte P und Q kein gemeinschaftliches Maß,

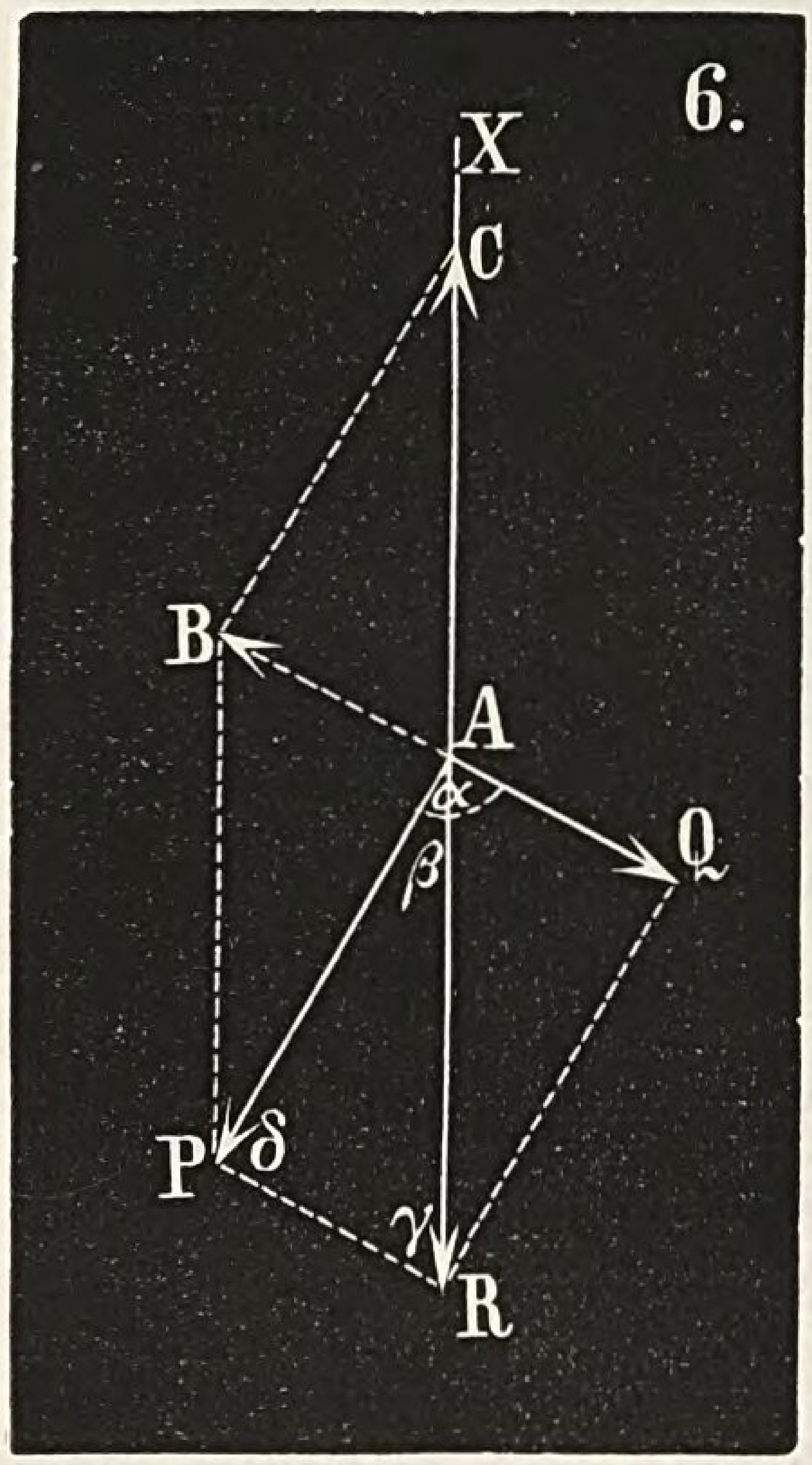
*) Die markierten Kräfte sind in der Figur durch angehängte Ziffern unterschieden, K'' = K_2.

so würde man doch durch die Annahme einer Abweichung der Resultante von der Diagonale auf Widersprüche stoßen.

b) Größe der Resultante.

Bringt man in A (Fig. 6) eine Kraft R_1 an, welche den Kräften P und Q das Gleichgewicht hält, so ist die Richtung von R_1 nun bekannt, die Größe aber zunächst noch unbestimmt. Da aber A im Gleichgewicht ist, so ist auch die Kraft Q der Resultante von R_1 und P gleich und entgegengesetzt (§ 16), und man weiß demnach, daß die Lage der Diagonale des Parallelogrammes, welches aus den Kräften P und R_1 konstruiert werden kann, durch die Richtung der Kraft Q gegeben ist. Von diesem Parallelogramm (APBX) ist somit eine Seite (AP) der Größe nach, die zweite Seite AX der Richtung nach und die Diagonale AB der Richtung nach gegeben. Dies genügt zur Konstruktion des Parallelogramms und somit zur Bestimmung von AX. Man zieht PB || AX, und durch den Schnittpunkt B die BC || PA, so ist AC die richtige Größe von R_1 wie sie dem Gleichgewicht der 3 Kräfte P, Q, R_1 entspricht. Es ist aber aus planimetrischen Gründen AC = AR, folglich auch die der R_1 gleiche Resultante von P und Q der Diagonale des Parallelogramms APRQ gleich.

6.



§ 25. **Berechnung der Resultante.** Bezeichnen wir den Winkel der zwei gegebenen Kräfte mit α, die Winkel des Dreieckes ARP (Fig. 6) beziehungsweise mit β, γ, δ, so haben wir nach den Regeln der Trigonometrie

$$AP : PR : AR = \sin\gamma : \sin\beta : \sin\delta$$

$$AR^2 = AP^2 + PR^2 - 2AP \cdot PR \cos\delta;$$

oder wenn wir die Linien durch Zahlen ausdrücken und bemerken, daß PR = AQ und $\delta = 180 - \alpha$, also $\sin \delta = \sin \alpha$ und $\cos \delta = - \cos \alpha$ ist:

$$1)\ P : Q : R = \sin \gamma : \sin \beta : \sin \alpha$$

$$2)\ R^2 = P^2 + Q^2 + 2P.Q \cos \alpha.$$

Vermöge dieser zwei Relationen ist R der Größe und Richtung nach durch Rechnung bestimmt. Zur Berechnung der Winkel kann man anstatt (1) und (2) auch die Gleichung

$$(3)\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\gamma - \beta) = \frac{P - Q}{P + Q} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \alpha$$

verwenden.

Für P = Q wird aus (2) oder auch direkt

$$R = 2P \cos \tfrac{1}{2} \alpha.$$

Für den besonderen Fall, daß $\alpha = 90^0$, folgt

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2};\ P = R \cos \beta;\ Q = R \sin \beta,$$

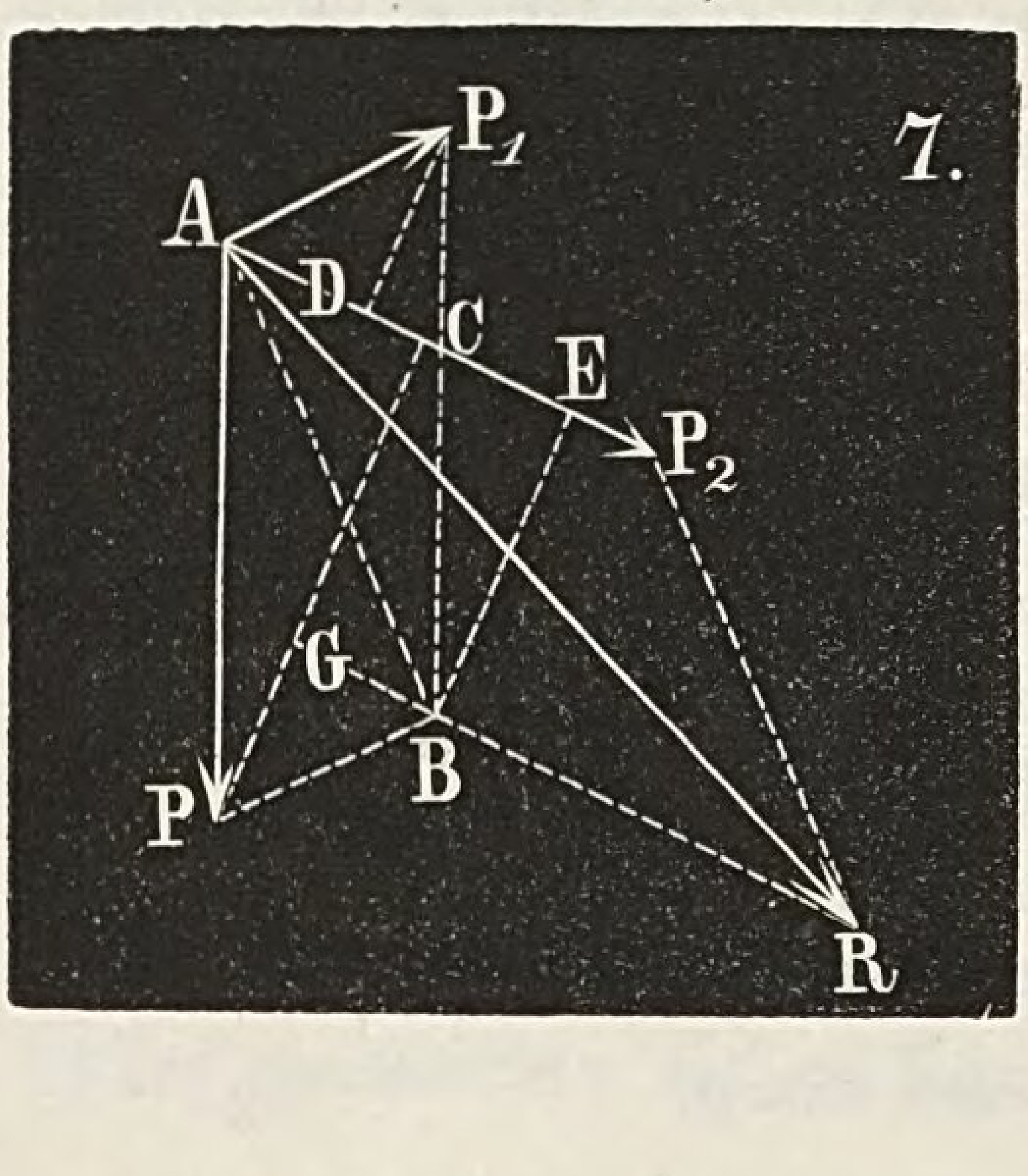
und durch Division der letzten zwei Gleichungen

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{Q}{P}.$$

Anm. Der in § 24 aufgestellte Fundamentalsatz der Mechanik dient nicht bloß dazu, zwei Kräfte in eine zu verwandeln, sondern auch umgekehrt jede Einzelkraft in zwei Komponenten zu zerlegen.

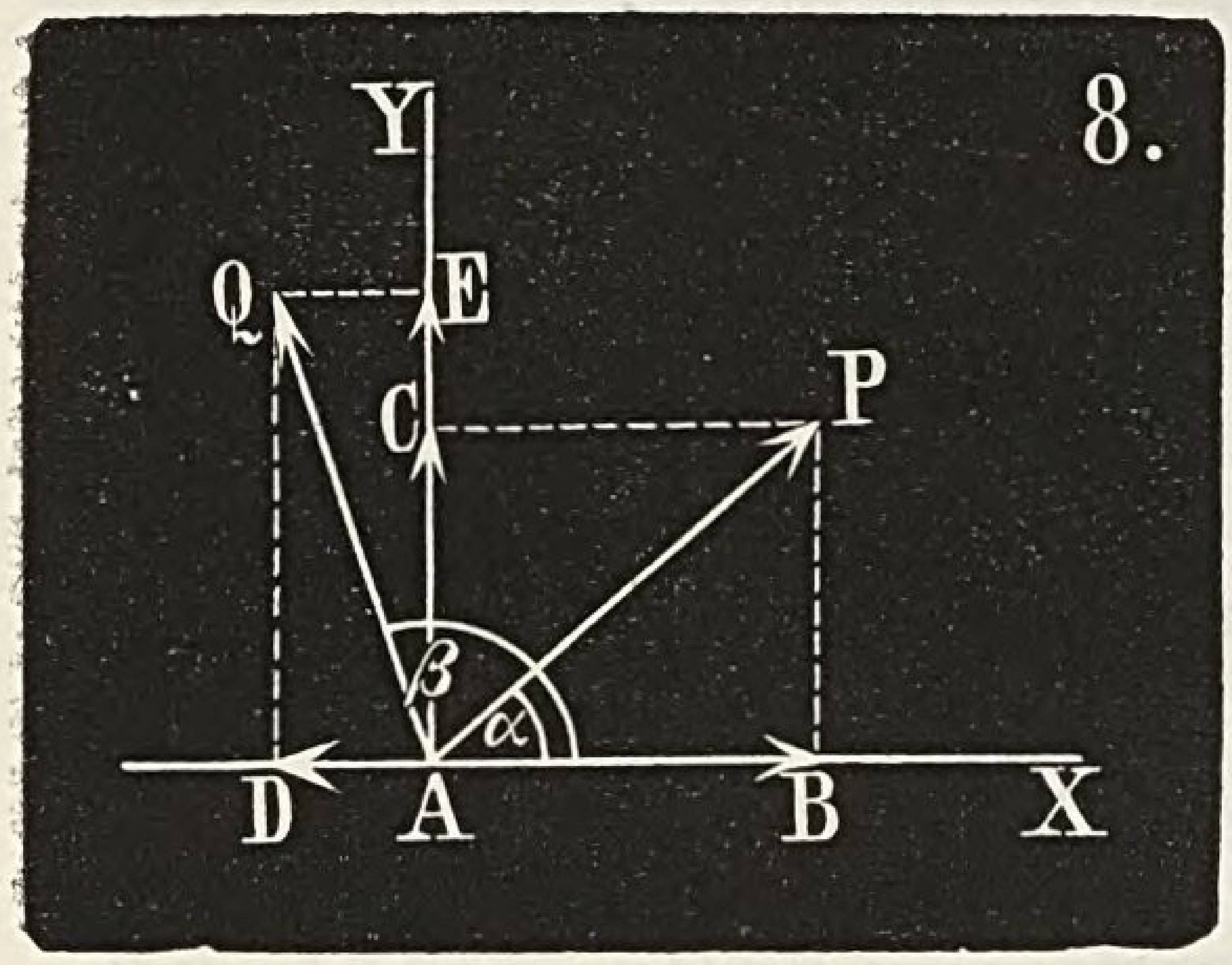
§ 26. **Lehrsatz.** Wirken mehr als zwei Kräfte auf einen Punkt A, so ist die Resultante der Größe und Richtung nach durch die Schlußseite eines Polygons ausgedrückt, dessen übrige Seiten gleich und parallel den gegebenen Kräften sind.

Beweis: Betrachten wir drei Kräfte P, P_1, P_2, welche der Größe und Richtung nach (Fig. 7) durch AP, AP_1, AP_2, dargestellt sind, so haben AP und AP_1 die Diagonale AB als Resultante; das aus AB und AP_2 konstruierte Parallelogramm liefert AR als Resultante der drei gegebenen Kräfte, welche nichts anders ist, als die vierte Seite des Vierecks APBRA, dessen



übrige drei Seiten den gegebenen Kräften gleich und parallel sind. Bei 4 Kräften schließt die Resultante ein Fünfeck u. s. w. Wird R = o, so halten sich die gegebenen Kräfte das Gleichgewicht und bilden unter sich ein geschlossenes Polygon.

§ 27. **Zerlegung in rechtwinkelige Komponenten.** Seien



A (Fig. 8) der angegriffene Punkt, AX und AY zwei beliebig angenommene aufeinander senkrechte Richtungen, P und Q zwei gegebene Kräfte, α und β die Winkel, welche diese Kräfte mit der Geraden AX bilden (diese Winkel sind von AX aus stets im gleichen Sinne der Drehung zu zählen, also XAP = α, XAQ = β) so läßt sich P in die rechtwinkeligen Komponenten AB und AC*, die Kraft Q in AD und AE zerlegen, wobei die Strecke AD der AB entgegengesetzt ist. Nun ist aber

$$AB = P \cos \alpha; \ AC = P \sin \alpha$$

$$AD = Q \cos \beta; \ AE = Q \sin \beta$$

Die in der Geraden AX wirkenden Seitenkräfte lassen sich nach § 19 in die Kraft

$$AB + AD = P \cos \alpha + Q \cos \beta$$

vereinigen; ebenso die längs AY wirkenden in

$$AC + AE = P \sin \alpha + Q \sin \beta.$$

Diesen so erhaltenen rechtwinkeligen Kräften entspricht eine Resultante, welche nach § 25 bestimmt ist. Wird Punkt A von beliebig vielen Kräften $P_0, P_1, P_2 \ldots\ldots P_n$ angegriffen, deren Richtungen mit AX die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \nu$ bilden, so läßt sich jede von ihnen nach vorstehender Anleitung in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte zerlegen. Die einen dieser Kräfte lassen sich in eine Einzelkraft X, die anderen in eine Einzelkraft Y vereinigen,

* Wie bekannt heißen in der Geometrie die Linien AB und AC die Projektionen der Geraden AP auf AX und AY. Die Vorzeichen hängen vom Winkel α ab.

so daß nur mehr zwei rechtwinkelige Kräfte in Betracht kommen, und zwar ist

$$X = P_0 \cos \alpha + P_1 \cos \beta + P_2 \cos \gamma + ... + P_n \cos \nu$$
$$Y = P_0 \sin \alpha + P_1 \sin \beta + P_2 \sin \gamma + ... + P_n \sin \nu.$$

Sobald hiernach X und Y gefunden sind, bestimmen wir nach § 25 ihre Resultante R und deren Richtungswinkel φ mit AX durch die Gleichungen

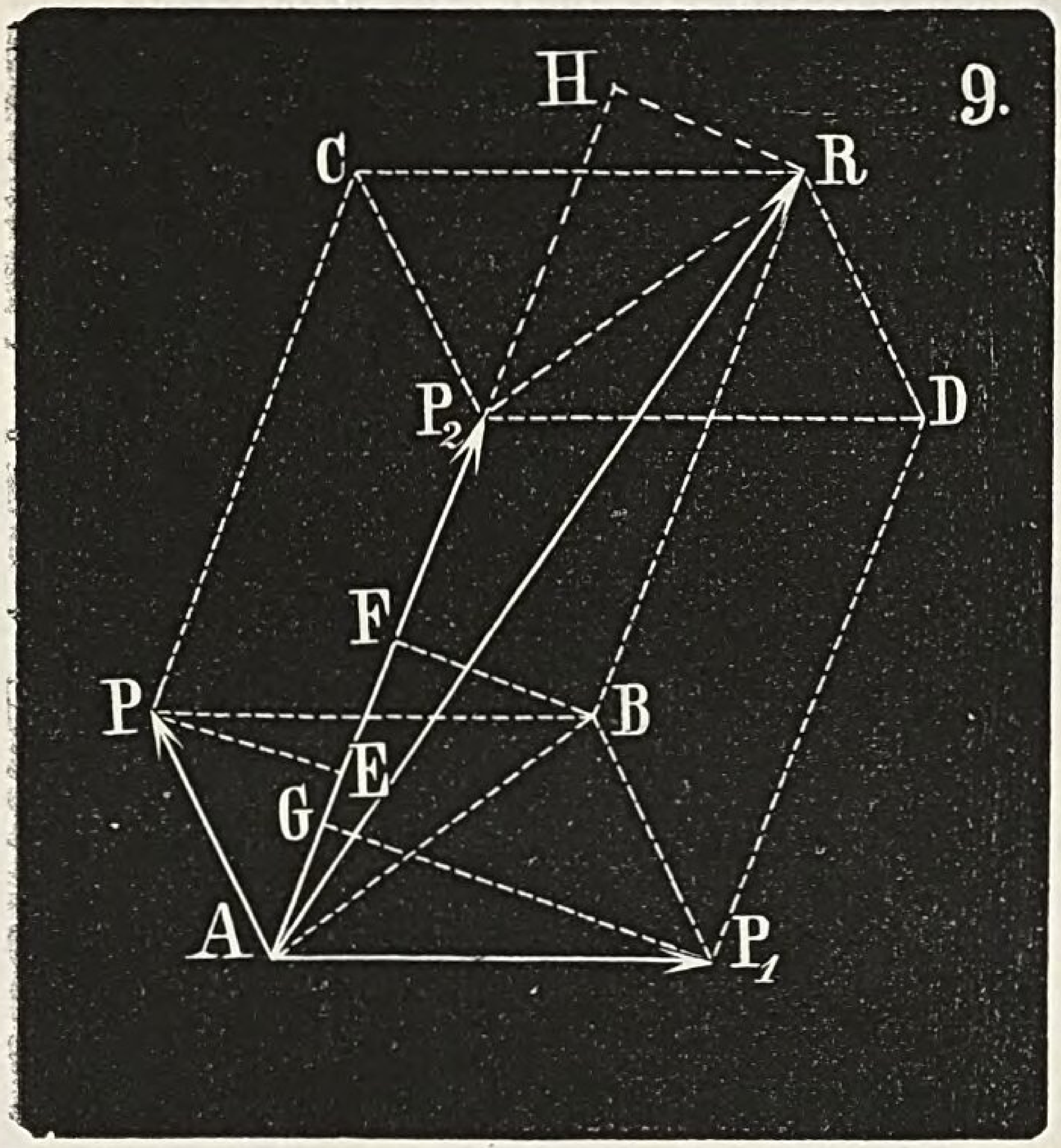
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}; \ \tang \varphi = \frac{Y}{X}.$$

Anm. Da bei der Zerlegung der Kräfte in zwei rechtwinkelige Komponenten die eine Komponente stets mit cosinus und die andere mit sinus behaftet ist, so kann man sie auch durch die Benennung Cosinuskomponente und Sinuskomponente von einander unterscheiden.

§ 28. **Gleichgewichtsbedingung.** Wird R = o, was nur eintreten kann, wenn X und Y zugleich Null werden, so sind die Kräfte unter sich im Gleichgewicht; ist R nicht Null, so tritt Gleichgewicht ein, wenn eine neue Kraft eingeführt wird, welche R gleich und entgegengesetzt ist. Da es nun unter allen Umständen möglich ist, die Resultante der Größe und Richtung nach zu bestimmen, so ist es auch stets möglich, die gegebenen Kräfte durch Einführung einer neuen Kraft ins Gleichgewicht zu bringen. Nach dem Sprachgebrauche der Geometrie ist X und Y nichts anderes, als die algebraische Summe aus den rechtwinkeligen (orthogonalen) Projektionen der gegebenen Kräfte. Die Bedingung des Gleichgewichtes läßt sich demnach in unserem Falle so aussprechen: Kräfte, welche einen Punkt so angreifen, daß ihre Richtungen in einer und derselben Ebene liegen, halten sich das Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer Projektionen auf eine Gerade und zugleich die algebraische Summe ihrer Projektionen auf eine zweite zur ersten senkrechte Grade Null ist.

§ 29. **Lehrsatz.** Die Resultante dreier Kräfte, welche einen Punkt A angreifen und nicht in einer Ebene liegen, ist

der Größe und Richtung nach durch die Diagonale eines Parallelepipeds bestimmt, welches die drei Kräfte zu Kanten hat.



9.

Bew. Seien die drei Kräfte der Größe und Richtung nach durch AP, AP_1, AP_2 dargestellt und Fig. 9 das aus denselben konstruierte Parallelepiped, so ist AB die Resultante aus AP und AP_1, und AR die Resultante aus AB und AP_2; mithin ist AR, d. i. die Diagonale des Parallelepipeds, die Resultante der drei gegebenen Kräfte.

Zusatz. Sowie drei lassen sich durch fortgesetzte Anwendung des Lehrsatzes beliebig viele Kräfte im Raume auf eine Einzelkraft zurückführen.

Berechnung der Resultante.*) Bezeichnen wir mit α, β, γ beziehungsweise die Winkel, welche die drei Kräfte unter sich bilden, so ist die Resultante R ausgedrückt durch

(1) $R^2 = P^2 + P_1^2 + P_2^2 + 2PP_1 \cos\alpha + 2PP_2 \cos\beta + 2P_1P_2 \cos\gamma$.

Denn aus dem Parallelogramm $ABRP_2$ ist nach § 25

$$AR^2 = AB^2 + AP_2^2 + 2AB \cdot AP_2 \cos BAP_2;$$

aus dem Parallelogramm $APBP_1$ folgt ähnlich

$$AB^2 = AP^2 + AP_1^2 + 2AP \cdot AP_1 \cos\alpha.$$

Setzen wir $\angle BAP_2 = \varphi$, und anstatt der Linien Zahlen,

*) Diese Berechnungen sind rein stereometrischer Natur: es wird die Diagonale eines Parallelepipedons der Größe und Lage nach aus den drei in einem Punkte zusammenstoßenden Kanten und den zugehörigen Kantenwinkeln berechnet.

so folgt aus beiden Gleichungen durch Addition

$$R^2 = P^2 + P_1^2 + P_2^2 + 2PP_1 \cos\alpha + 2AB \cdot P_2 \cos\varphi.$$

Nun ist nach dem geometrischen Satze: Die Projektion der Diagonale eines Parallelogrammes ist gleich der algebraischen Summe der Projektionen beider Seiten,

$$AF = AE + AG, \text{ oder}$$

$$AB \cos\varphi = AP \cos\beta + AP_1 \cos\gamma = P \cos\beta + P_1 \cos\gamma.$$

Mit Hilfe dieses Wertes erhalten wir sofort die aufgestellte Formel.

Bezeichnen wir mit λ, μ, ν die Winkel, welche die Resultante R mit den drei Kräften bildet, so sind dieselben ausgedrückt durch die Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} R\cos\lambda = P + P_1\cos\alpha + P_2\cos\beta \\ R\cos\mu = P\cos\alpha + P_1 + P_2\cos\gamma \\ R\cos\nu = P\cos\beta + P_1\cos\gamma + P_2\cdot \end{cases}$$

Denn mit Rücksicht auf Fig. 9 ist, wenn wir $RH \perp AP_2$ ziehen

$$AH = AP_2 + P_2H = AP_2 + AF = AP_2 + AG + AE.$$

Nun ist aber

$$AH = AR\cos\nu = R\cos\nu$$
$$AG = AP_1\cos\gamma = P_1\cos\gamma$$
$$AE = AP\cos\beta = P\cos\beta; \text{ mithin}$$
$$R\cos\nu = P_2 + P_1\cos\gamma + P\cos\beta.$$

Die anderen zwei Gleichungen lassen sich auf dieselbe Weise ableiten und ergeben sich auch aus der vorstehenden Gleichung durch bloße Buchstabenvertauschung.

Für ein rechtwinkeliges Parallelepiped ist $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$; folglich aus Gl. (1) und (2)

$$(3)\quad \begin{cases} R^2 = P^2 + P_1^2 + P_2^2 \\ \cos\lambda = \frac{P}{R};\ \cos\mu = \frac{P_1}{R};\ \cos\nu = \frac{P_2}{R} \end{cases}$$

Außerdem findet noch die aus den letzten drei Gleichungen abgeleitete Bedingung statt

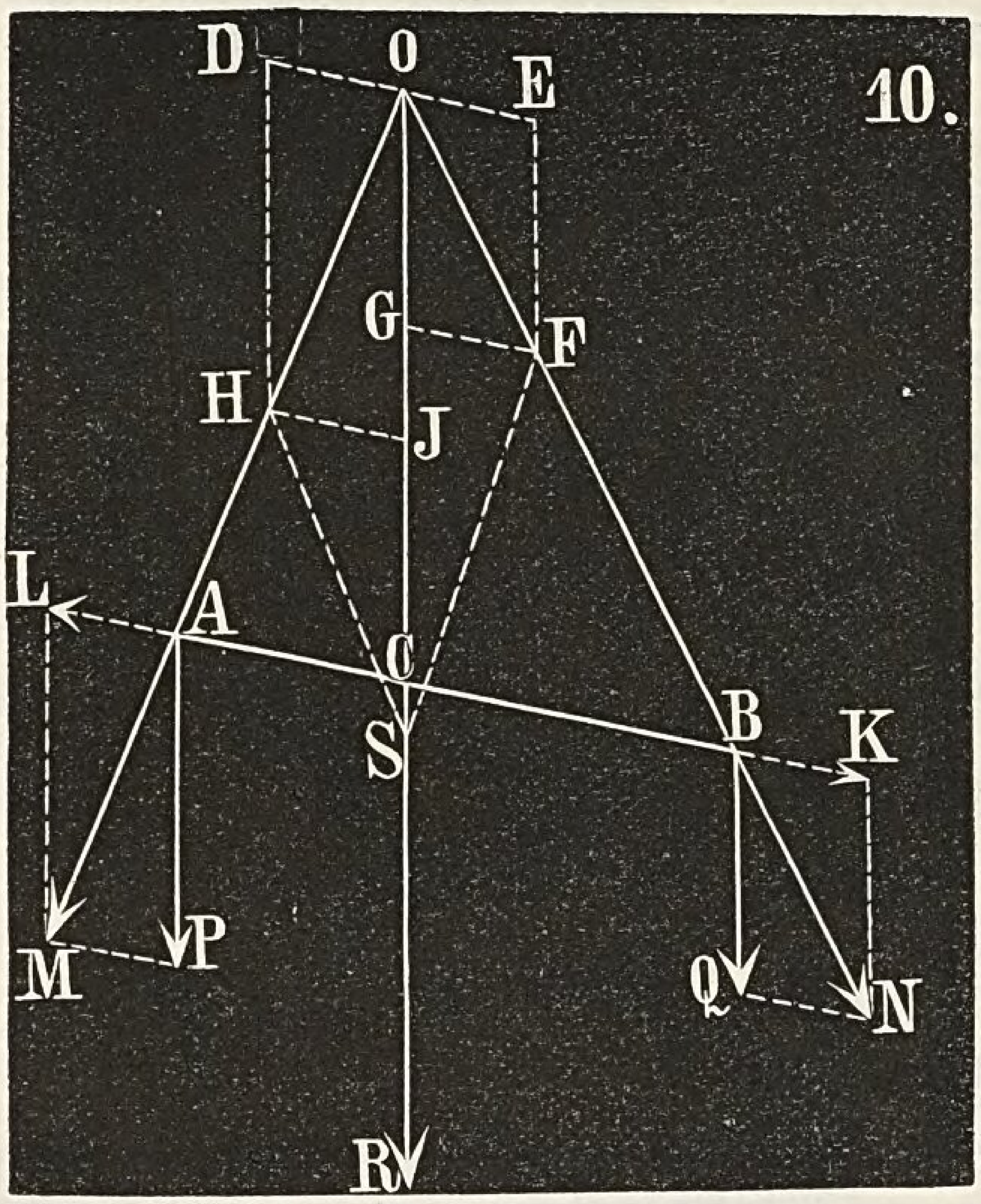
$$(4)\quad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Zweites Kapitel.

Resultante und Gleichgewicht paralleler Kräfte.

§ 30. **Erklärung.** Sind die Richtungen zweier Kräfte parallel, so heißen sie selbst *parallel*, wenn sie nach derselben Richtung hin wirken; dagegen *antiparallel*, wenn sie nach entgegengesetzter Richtung wirken.

§ 31. **Lehrsatz.** *Zwei parallele Kräfte, welche an zwei Punkten eines starren Systems angreifen, haben eine Resultante, welche 1) gleich der Summe der Kräfte, 2) denselben parallel ist und 3) die Verbindungsstrecke der Angriffspunkte in zwei Stücke teilt, welche sich umgekehrt wie die an ihnen angreifenden Kräfte verhalten.*



Sind P und Q die Kräfte und AB die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte, welche von der Resultante R in C durchschnitten wird, so ist $R = P + Q$ und $\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$.

Beweis. Seien die Kräfte P und Q der Größe und Richtung nach durch AP und BQ dargestellt, so bringt man, um die Richtungen dieser Kräfte konvergent zu machen, in A und B zwei gleiche und entgegengesetzte längs AB wirkende Kräfte $AL = BK$ an, welche sich das Gleichgewicht halten und somit die Wirkung von P und Q nicht stören. Andererseits lassen sich nun die in A und B wirkenden Kräfte durch ihre Resultanten AM und BN ersetzen. Verlängert man beide Richtungen bis zu ihrem Durchschnitt in O, so läßt sich der Angriffspunkt

beider Kräfte nach O verlegen, wobei das Ganze als starre Verbindung zu denken ist. Macht man daher OH = AM und OF = BN und zerlegt diese Kräfte in die ursprünglichen Komponenten der Größe und Richtung nach, so bringen sowohl die Resultanten OH und OF als auch ihre Komponenten in O dieselbe Wirkung hervor, wie die ursprünglichen Kräfte in A und B.

Von den Komponenten in O heben sich OD und OE nach § 10 auf, und es bleiben OJ = AP und OG = BQ allein wirksam, so daß

$$OJ + OG = P + Q$$

die Resultante der in O, also auch der ursprünglichen in A und B wirksamen Kräfte P und Q ist. Diese Resultante ist parallel zu P und Q, und ihre Richtung schneidet die Gerade AB in einem Punkte C, dessen Lage sich mit Hilfe der ähnlichen Dreiecke

$$\triangle AMP \sim \triangle AOC, \text{ und } \triangle BNQ \sim \triangle BOC$$

bestimmen läßt. Denn es ist

$$AP : MP = OC : AC$$
$$NQ : BQ = BC : OC;$$

woraus durch Multiplikation folgt

$$AP \cdot NQ : MP \cdot BQ = BC : AC;$$

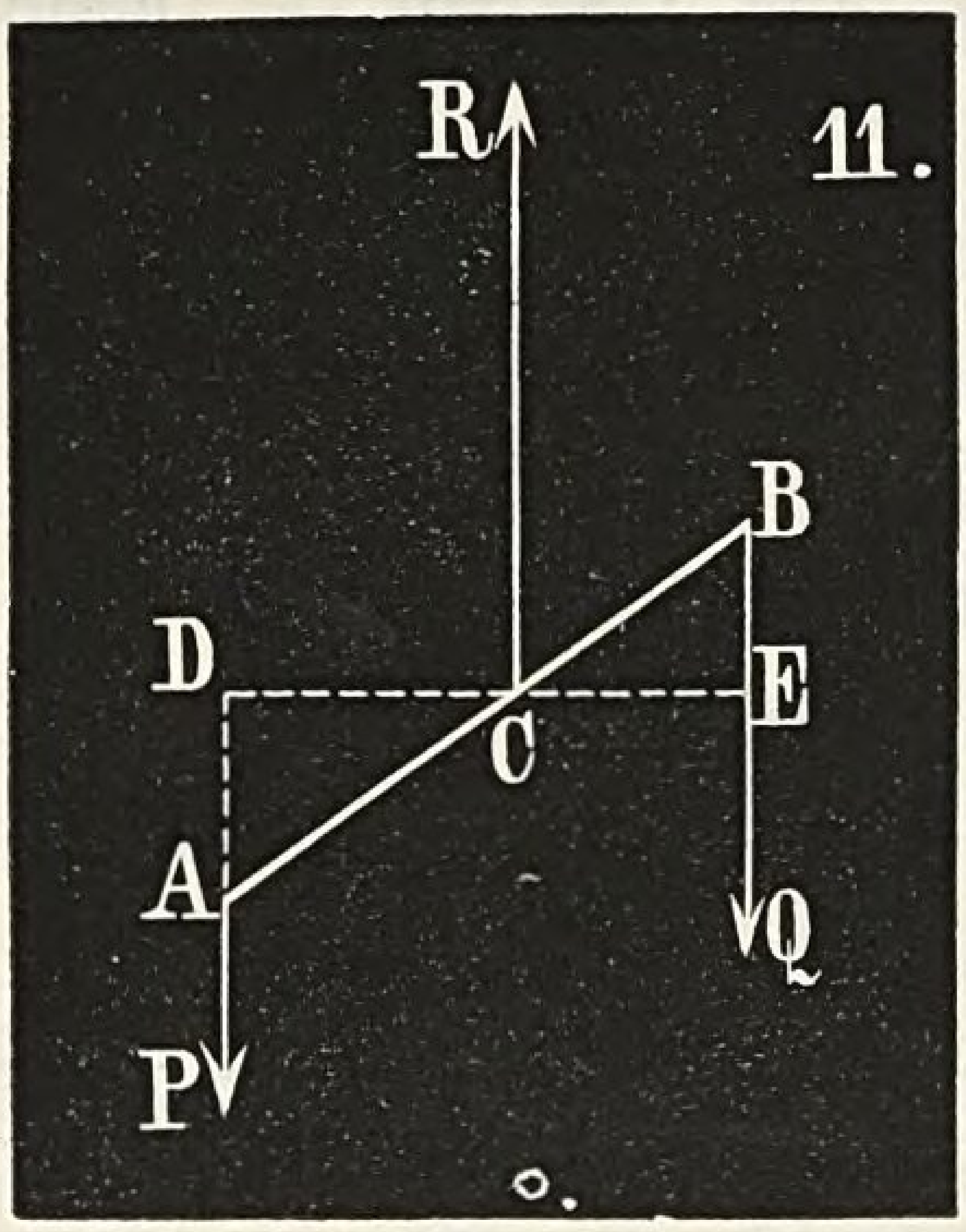
oder in Berücksichtigung, daß MP = NQ

$$AP : BQ = BC : AC; \text{ oder}$$
$$P : Q = BC : AC.$$

Zusatz. (Fig. 11.) Man kann den Schnittpunkt C leicht durch Konstruktion finden, wenn man jede Kraft an dem Angriffspunkte der anderen anbringt, die eine der Kräfte umkehrt und nun die Endpunkte der Kräfte durch eine Gerade verbindet.

§ 32. **Gleichgewichtsbedingung.** Da die Resultante R durch eine ihr gleiche und entgegengesetzte Kraft aufgehoben wird, so kann auch die Wirkung der Kräfte P und Q (Fig. 11) durch eine Einzelkraft CR aufgehoben werden, welche ihrer Summe gleich, der Richtung

nach antiparallel ist und längs einer Geraden wirkt, deren Schnittpunkt C mit AB durch die Gleichung



11.

$$AC \cdot P = BC \cdot Q$$

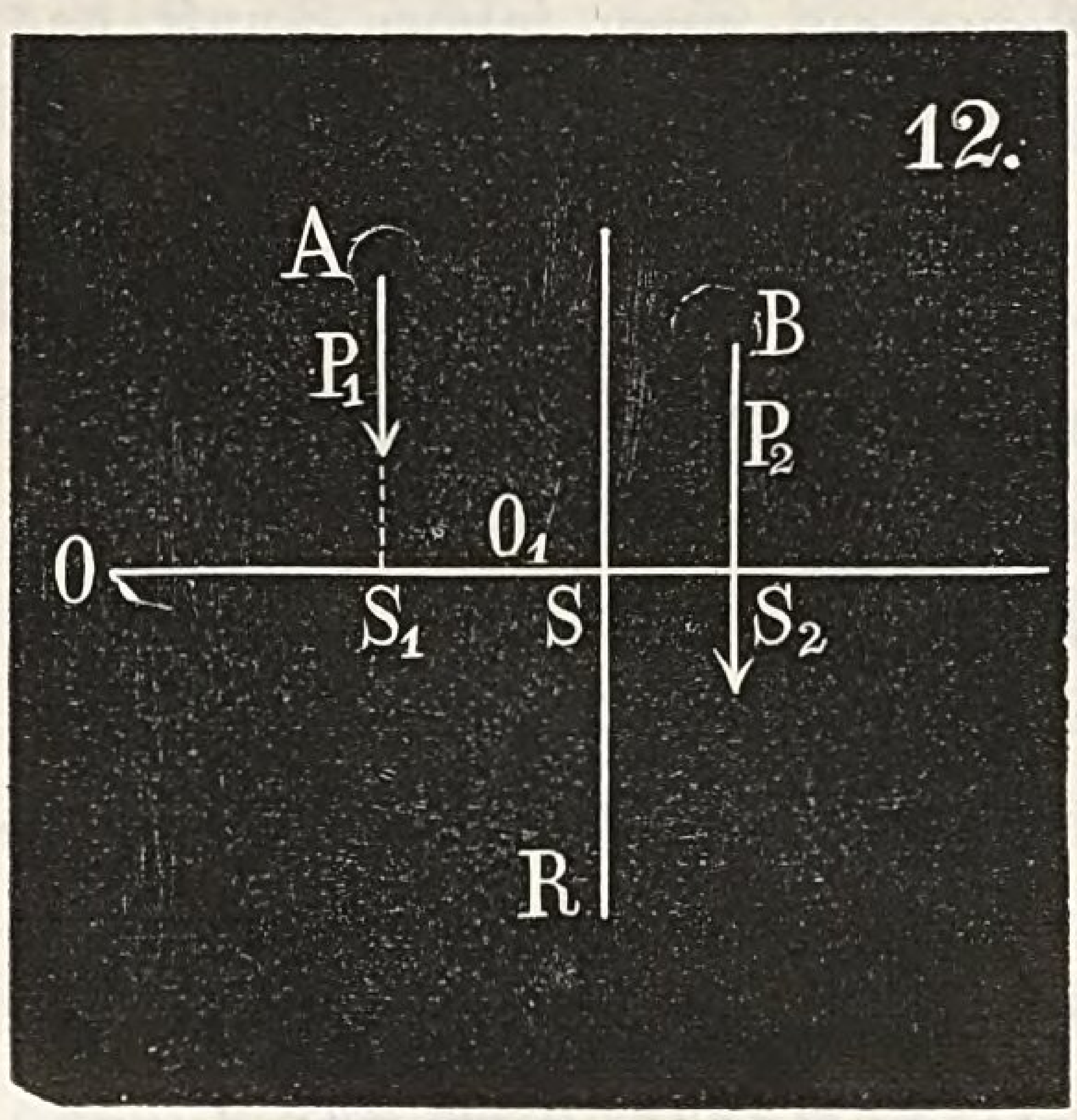
$$\text{oder } AC = \frac{Q}{P+Q} \cdot AB$$

bestimmt ist. Dieser Punkt C ist unabhängig von dem Winkel, welchen die Kräfte mit der Verbindungslinie (AB) ihrer Angriffspunkte bilden.

Zusatz. Ist $P = Q$, so liegt der Punkt C in der Mitte von AB.

§ 33. **Erklärung.** (Statisches Moment.) Unter dem statischen Momente einer Kraft in Bezug auf einen Punkt versteht man das Produkt aus der Größe der Kraft in die Länge der Senkrechten, welche von dem Punkte auf die Richtungslinie der Kraft gefällt ist.

§ 34. **Lehrsatz.** In Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene zweier Parallelkräfte ist das statische Moment der Resultante gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte.



12.

Bei dem Beweise dieses Satzes ist es nützlich zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Punkt a) außerhalb b) innerhalb des durch die Kraftrichtungen begrenzten Parallelstreifens angenommen wird.

ad a.) Seien P_1 und P_2 (Fig. 12) die gegebenen Parallelkräfte, $R = P_1 + P_2$ ihre Resultante, O ein beliebiger außerhalb des Parallelstreifens $(P_1 P_2)$ liegender Punkt

der Ebene, so ziehe man von O auf die Richtung von P_1 die Senkrechte OS_1, welche R in S und P_2 in S_2 schneidet, und bezeichne OS_1 mit x_1, OS_2 mit x_2 und OS mit $\overline{x}$, dann wird behauptet, daß

$$R\overline{x} = P_1 x_1 + P_2 x_2$$

Beweis. Denkt man sich die Angriffspunkte der Kräfte nach S_1, S, S_2 verlegt, so ist nach § 31

$$(\overline{x} - x_1) P_1 = (x_2 - \overline{x}) P_2,$$

woraus algebraisch $\overline{x}(P_1 + P_2) = P_1 x_1 + P_2 x_2$

und nach § 31 $R\overline{x} = P_1 x_1 + P_2 x_2$ folgt.

ad b) Liegt der Punkt O innerhalb des Parallelstreifens, etwa in O', so gilt der Satz nur unter der Bedingung, daß Perpendikel, welche von O' aus nach entgegengesetzten Richtungen laufen, mit entgegengesetzten Vorzeichen eingeführt werden.

Setzt man $O'S = \overline{x}$, $O'S_2 = x_2$, so ist $-O'S_1 = x_1$ zu setzen. Dann gilt

$$R\overline{x} = P_1 x_1 + P_2 x_2,$$

wie sich aus $P_1 (O'S_1 + O'S) = P_2 (O'S_2 - O'S)$

oder $(P_1 + P_2) O'S = P_1 (- O'S_1) + P_2 (O'S_2)$

ergibt.

Zusatz. Wählt man den Punkt O in der Richtungslinie einer Kraft, so ist in Bezug auf einen solchen Punkt das statische Moment der Kraft deshalb Null, weil die zugehörige Senkrechte Null ist, und die Gleichung der statischen Momente vereinfacht sich um ein Glied.

Man erhält so die folgenden Sätze, welche sich vorzüglich zu Berechnungen eignen:

In Bezug auf einen Punkt in der Richtungslinie einer der Parallelkräfte ist das statische Moment der Resultante gleich dem statischen Momente der anderen Parallelkraft.

In Bezug auf einen Punkt der Resultante ist die algebraische Summe der statischen Momente der Parallelkräfte gleich Null.

§ 35. **Lehrsatz.** (Verallgemeinerung des Satzes von den statischen Momenten.) Es seien P_1, P_2, P_3

.... P_n beliebige parallele Kräfte, deren Richtungslinien sämtlich in einer Ebene liegen, so ist die Resultante R_n dieser Kräfte der Größe und Richtung nach bestimmt wie folgt:

1) Die Resultante ist gleich der Summe der Kräfte

$$R_n = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n,$$

2) Die Resultante ist den Kräften parallel,

3) In Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene ist das statische Moment der Resultante gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Parallelkräfte:

$$R_n \overline{x}_n = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \ldots . P_n x_n$$

Der Beweis wird durch ein Verfahren geführt, welches unter dem Namen der vollständigen Induktion bekannt ist. Man nimmt an, der Satz gelte für eine bestimmte Anzahl (k) von Kräften und weist nach, daß er unter dieser Voraussetzung auch für eine Kraft mehr, also für (k + 1) Kräfte gilt. Nun ist er (in § 34) für zwei Kräfte bewiesen, folglich gilt er auch für 3, und da er demnach für 3 gilt, so auch für 4, u. s. f. allgemein.

Angenommen es gelte:

$$\left.\begin{array}{l} R_k = P_1 + P_2 + \ldots . P_k \\ \text{und} \quad R_k \overline{x}_k = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots . P_k x_k \end{array}\right\} \text{Voraussetzung}$$

---

so wird behauptet, es sei auch

$$\left.\begin{array}{l} R_{k+1} = P_1 + P_2 + \ldots . P_k + P_{k+1} \\ \text{und} \\ R_k \overline{x}_{k+1} = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots . P_k x_k + P_{k+1} x_{k+1} \end{array}\right\} \text{Behauptung}$$

Beweis. Zunächst ist deutlich, daß die Resultante der beiden Kräfte R_k und P_{k+1} zugleich die Resultante der (k + 1) Kräfte ist, da dem Begriff der Resultante gemäß in Bezug auf ihre statische Wirkung die Kräfte $P_1, P_2 \ldots . P_k$ durch ihre Resultante R_k ersetzt werden können. Nun gelten aber nach § 31 und § 34 für die zwei Parallelkräfte R_k, P_{k+1} und ihre Resultante R_{k+1} die Beziehungen

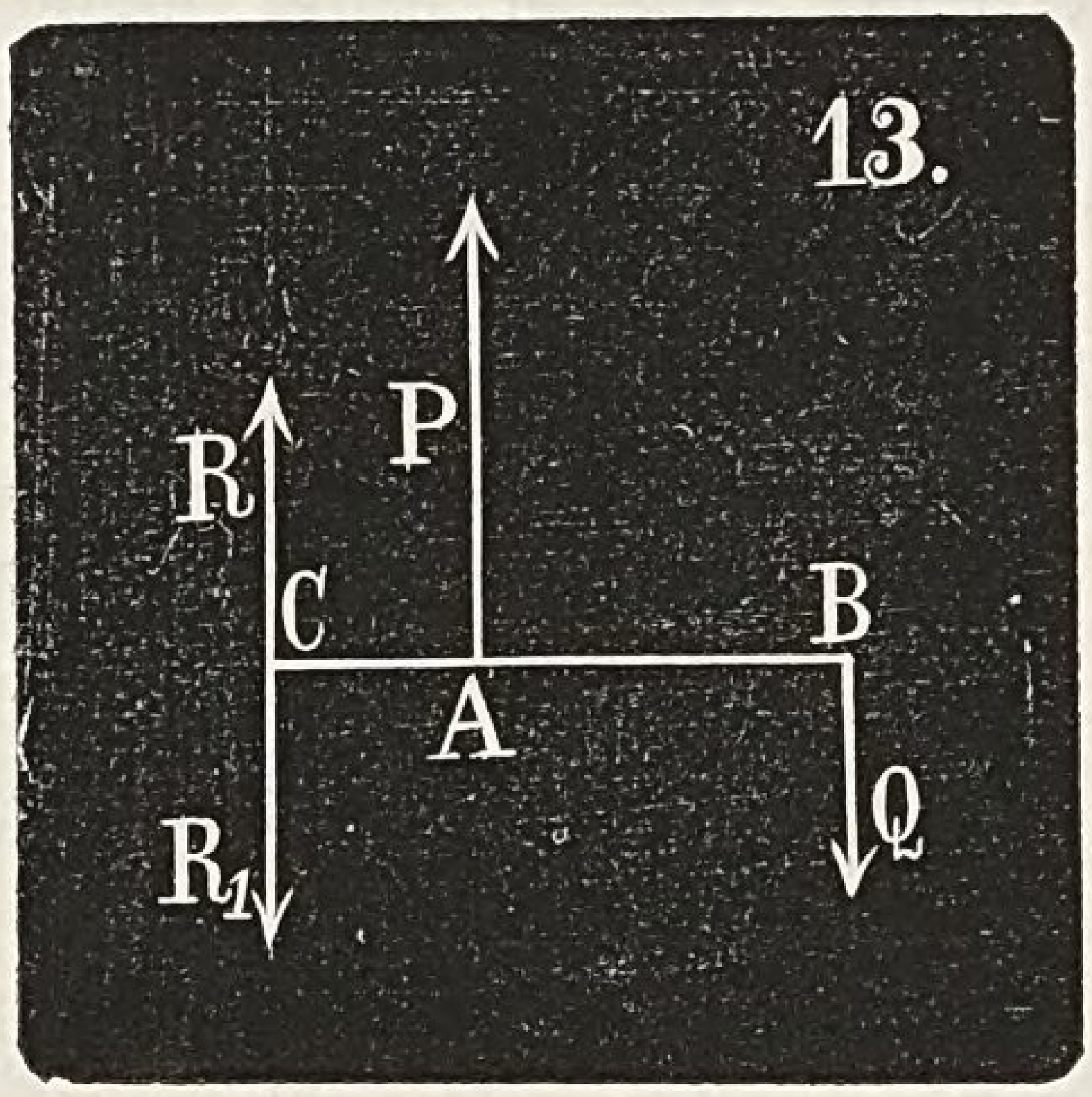
$$R_{k+1} = R_k + P_{k+1},$$

$$R_{k+1} \overline{x}_{k+1} = R_k x_k + P_{k+1} x_{k+1}.$$

Setzt man hier die in der Voraussetzung gegebenen Werte von R_k und $R_k \overline{x_k}$ ein, so ergibt sich die Behauptung.

§ 36. **Lehrsatz.** (Antiparallele Kräfte.) (Fig. 13.) Zwei an einem starren Systeme wirkende antiparallele Kräfte ($P > Q$) von ungleicher Größe haben eine (statische) Resultante, deren Größe gleich der Differenz ($P - Q$) der Kräfte ist, deren Richtung mit der Richtung der größeren Kraft (P) parallel ist und die Verbindungslinie AB der Angriffspunkte in einem Punkte (C) schneidet, welcher außerhalb des Parallelstreifens (PQ) auf der Seite der größeren Kraft P so liegt, daß

$$AC = \frac{Q}{P - Q} AB.$$



Beweis. Man kann sich vorstellen, daß die größere Kraft P gleich und entgegengesetzt ist der in A angreifenden Resultante von 2 Parallelkräften Q und R_1, von welchen Q in B und R_1 in dem mit AB starr verbundenen Punkte C angreift. Dann besteht Gleichgewicht zwischen den drei Kräften P, Q, R_1, und es ist nach § 31

$$P = R_1 + Q$$
$$R_1 \cdot \overline{AC} = Q \cdot \overline{AB} \cdot$$
$$\text{oder } R_1 = P - Q$$
$$\text{und } AC = AB \cdot \frac{Q}{P - Q} \cdot$$

Da die drei Kräfte an dem starren Systeme der drei Punkte BAC im Gleichgewicht sind, so ist (nach § 16) jede derselben der Resultante der beiden anderen gleich und in gerader Linie entgegengesetzt. Somit ist eine der R_1 in C entgegengesetzte Kraft R als (statische) Resultante der beiden

Kräfte P und Q zu betrachten. Sie entspricht den obigen Behauptungen.

Anmerkung. Da der Punkt C der Resultante außerhalb der starren Verbindung AB liegt, so kann es vorkommen, daß die Richtungslinie der Kraft R überhaupt keinen mit AB starr verbundenen Punkt trifft. In diesem Falle besteht thatsächlich keine Resultante, und das Gleichgewicht läßt sich durch eine Kraft nicht herstellen.

Unerfüllbar sind die Bedingungen des Gleichgewichts, wenn $P = Q$. Die Kräfte $(P = Q)$ bilden dann ein Kräftepaar. Die Theorie der Kräftepaare wird besonders behandelt werden.

§ 37. **Lehrsatz.** (Fig. 13.) Auch für zwei antiparallele Kräfte gilt der Satz von den statischen Momenten, wenn Kräfte von entgegengesetzter Richtung mit entgegengesetzten Vorzeichen eingeführt werden.

Beweis. Nach § 34 gilt für die Kräfte R_1 und Q und deren in A angreifenden Resultante $(R_1 + Q)$ in Bezug auf einen Punkt der Ebene, welcher von den Richtungen der genannten Kräfte bez. um die Strecken $\overline{x}$, x_2, x_1 absteht:

$$(R_1 + Q)\, x_1 = R_1 \overline{x} + Q x_2,$$

folglich $R_1 \overline{x} = (R_1 + Q)\, x_1 - Q x_2$.

Ersetzt man $(R_1 + Q)$ durch seinen Zahlenwert (P), und R_1 durch R,

so wird $R \overline{x} = P x_1 - Q x_2$

oder $R \overline{x} = P x_1 + (- Q)\, x_2$.

Es ist also auch hier das statische Moment der Resultante gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte, wenn man die den Kräften R und P entgegengesetzt gerichtete (antiparallele) Kraft Q mit negativem Vorzeichen einführt.

§ 38. **Lehrsatz.** Die Resultante (R) eines beliebigen Systemes von Kräften, welche an einem starren Systeme materieller Punkte so angreifen, daß ihre Richtungslinien in einer Ebene einander parallel oder antiparallel sind, ist der Größe und Richtung nach bestimmt wie folgt:

a) die Größe der Resultante ist gleich der algebraischen Summe der Kräfte, wobei Kräfte von entgegengesetzter Richtung mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen sind,

b) die Resultante ist den Kräften parallel und von gleichem Sinne der Richtung mit denjenigen Kräften, mit welchen ihr Vorzeichen übereinstimmt.

c) In Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene ist das statische Moment der Resultante gleich der algebraischen Summe der statischen Momente aller Einzelkräfte. Bei Bildung dieser Summe sind sowohl Senkrechte, welche von dem Punkte aus nach entgegengesetzter Richtung laufen als Kräfte, welche entgegengesetzte Richtung haben, mit entgegengesetzten Vorzeichen einzuführen.

Der Beweis ergibt sich insofern aus § 36 und § 37, als man die Kräfte P und Q als die Resultanten beliebiger parallelen und antiparallelen Kräfte ansehen kann, und somit R als die Gesamt-Resultante des Systems.

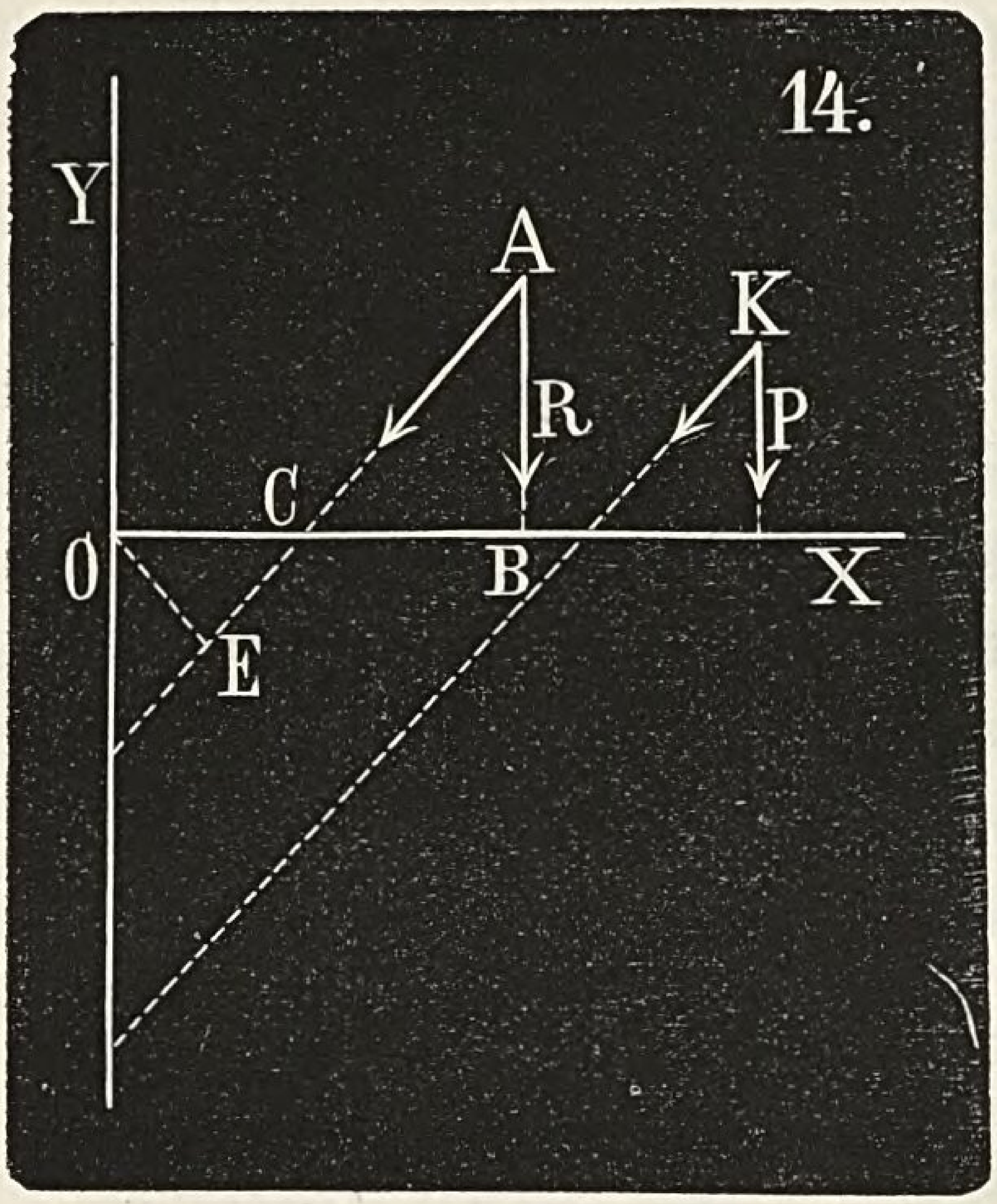
Anmerkung. Der Angriffspunkt der Resultante ist insofern unbestimmt, als derselbe in jedem zu dem starren Systeme gehörenden materiellen Punkte der Angriffslinie angenommen werden kann.

§ 39. **Erklärung**. Die Lage eines Punktes in der Ebene kann dadurch bestimmt werden, daß man angibt, wie weit derselbe von zwei sich rechtwinkelig schneidenden Geraden absteht. Diese beiden Geraden heißen Koordinatenachsen, ihr Schnittpunkt der Ursprung (der Koordinaten). Die beiden Abstände heißen die Koordinaten des Punktes. Zur Unterscheidung der Koordinaten erhält die eine den Namen Abscisse, während die andere Ordinate heißt. Entsprechend nennt man die den Abscissen parallele Koordinatenachse die Abscissenachse, die den Ordinaten parallele die Ordinatenachse.

Die Angriffspunkte von Kräften werden dadurch „gegeben“, daß man die beiden Koordinaten eines jeden derselben in Längeneinheiten angibt.

§ 40. **Lehrsatz**. (Mittelpunkt der Parallelen.) (Fig. 14.) Dreht man parallele Kräfte um ihre Angriffspunkte,

alle in gleichem Sinn um den gleichen Winkel, so dreht sich die Resultante um einen Punkt ihrer Angriffslinie, dessen Lage



von der Größe der Drehung unabhängig ist. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt der Parallelkräfte.*)

Beweis. Wir legen die Koordinatenachsen OX, OY so, daß OY der Richtung der Kräfte parallel ist. Die Angriffslinie der Resultante sei AB, K sei der Angriffspunkt einer beliebigen der Parallelkräfte.

Nachdem die Kräfte um den Winkel α gedreht worden sind, schneide die Richtung der Resultante R die ursprüngliche Angriffslinie AR im Punkte A, so ist nachzuweisen, daß die Koordinaten von A, nämlich die Abscisse OB und die Ordinate AB, von dem Drehungswinkel CAB unabhängig sind.

Was die Abscisse OB $= \overline{x}$ betrifft, so gibt der Satz von den statischen Momenten in Bezug auf den Ursprung O

$$R\overline{x} = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \ldots . P_n x_n \ldots (1)$$

wenn $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ die Abscissen der Angriffspunkte der einzelnen Parallelkräfte sind. Die Abscisse $\overline{x}$ ist somit von dem Winkel CAB unabhängig.

Um dasselbe auch für die Ordinate AB $= \overline{y}$ nachzuweisen, wenden wir den Satz von den statischen Momenten auch auf die zweite Lage der Kräfte an, und ziehen zu diesem Zwecke OE $= \overline{z}$ senkrecht auf die Richtung der Resultante.

Dieselbe Senkrechte wird die Richtungslinien der einzelnen

---

*) Derselbe ist, wie unten näher erläutert werden wird, für die Statik von hervorragender Bedeutung.

Parallelkräfte (P) schneiden und der Punkt O von diesen beziehungsweise um die Strecken

$z_1, z_2, z_3 \ldots z_n$ entfernt sein.

Dann gilt ebenfalls nach § 35

$$R\bar{z} = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + P_n z_n \ldots (2)$$

Ferner ist

$$OE = OC \cos\alpha = (\bar{x} - CB) \cos\alpha = \bar{x} \cos\alpha - AB \sin\alpha$$

oder $\bar{z} = \bar{x} \cos\alpha - \bar{y} \sin\alpha$

Ebenso ist für die einzelnen Kräfte, wenn man analog die Ordinaten ihrer Angriffspunkte mit $y_1\ y_2\ y_3 \ldots y_n$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \\ z_2 &= x_2 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha \\ z_3 &= x_3 \cos\alpha - y_3 \sin\alpha \\ &\vdots \\ z_n &= x_n \cos\alpha - y_n \sin\alpha \end{aligned}$$

Substituiert man diese Werte in die letzte Gleichung (2) der statischen Momente, so erhält man

$$R\bar{x} \cos\alpha - R\bar{y} \sin\alpha$$

$$= P_1 x_1 \cos\alpha + P_2 x_2 \cos\alpha + P_3 x_3 \cos\alpha + \ldots P_n x_n \cos\alpha$$

$$- P_1 y_1 \sin\alpha - P_2 y_2 \sin\alpha - P_3 y_3 \sin\alpha - \ldots P_n y_n \sin\alpha$$

und durch Subtraktion dieser Gleichung von der mit cos α multiplizierten Gleichung (1) und Division durch den gemeinschaftlichen Faktor sin α:

$$R\bar{y} = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \ldots P_n y_n .$$

Es ist somit der behauptete Lehrsatz erwiesen. Zugleich sind die Koordinaten ($\bar{x}$ und $\bar{y}$) des Mittelpunktes der Parallelkräfte ermittelt. Ihre Werte lassen sich einfach ausdrücken durch die Symbole

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\,(Px)}{\Sigma\,(P)}; \quad \bar{y} = \frac{\Sigma\,(Py)}{\Sigma\,(P)}.$$

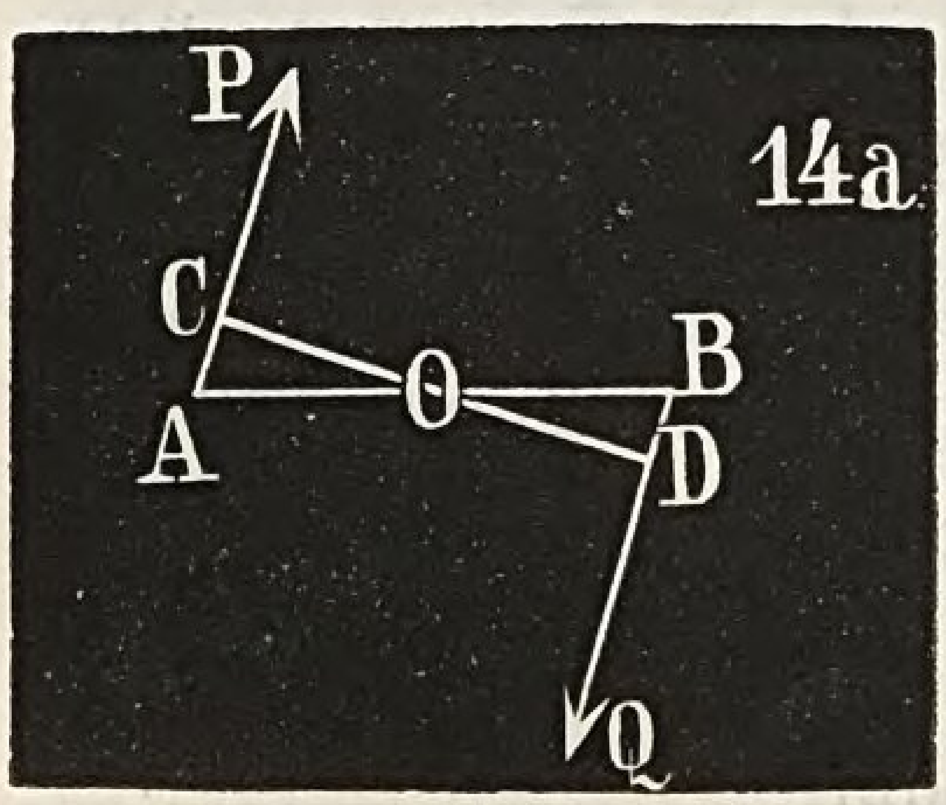
Zusatz. Auch antiparallele Kräfte haben einen Mittelpunkt, weil der Satz von den statischen Momenten, mittelst dessen der Mittelpunkt der Parallelkräfte bestimmt worden ist, auch für antiparallele Kräfte gilt, wenn man entgegengesetzte Richtungen durch entgegengesetzte Vorzeichen ausdrückt.

§ 41. **Anmerkung.** Der Mittelpunkt von Parallelkräften ist nicht notwendig auch der Angriffspunkt ihrer Resultante, sondern ein Punkt, welcher die rein geometrische Bedeutung hat, stets der Angriffslinie der Resultante anzugehören. Nachdem der Mittelpunkt einmal aus der Größe der Kräfte und den Koordinaten ihrer Angriffspunkte berechnet ist, ist die Lage der Angriffslinie der Resultante für alle möglichen Richtungen desselben Systems von Parallelkräften bestimmt. Der *Angriffspunkt der Resultante* ist nach wie vor insofern *unbestimmt*, als er in irgend einen (beliebigen) mit den Angriffspunkten der Kräfte starr verbundenen Punkt der Angriffslinie verlegt werden kann. Fehlt ein solcher Punkt, so gibt es auch keine Resultante. Der Mittelpunkt hingegen liegt häufig außerhalb der starren Verbindung.

Drittes Kapitel.

Von den Kräftepaaren.

§ 42. **Erklärung.** (Fig. 14 a.) Zwei antiparallele Kräfte von gleicher Größe, welche an einem starren Systeme materieller Punkte angreifen, bilden ein *Kräftepaar*. Der (senkrechte) Abstand (CD) ihrer Richtungslinien heißt der *Arm* des Paares. Das Produkt aus einer Kraft in den Arm heißt das *Moment* (Drehungsmoment) des Kräftepaares.

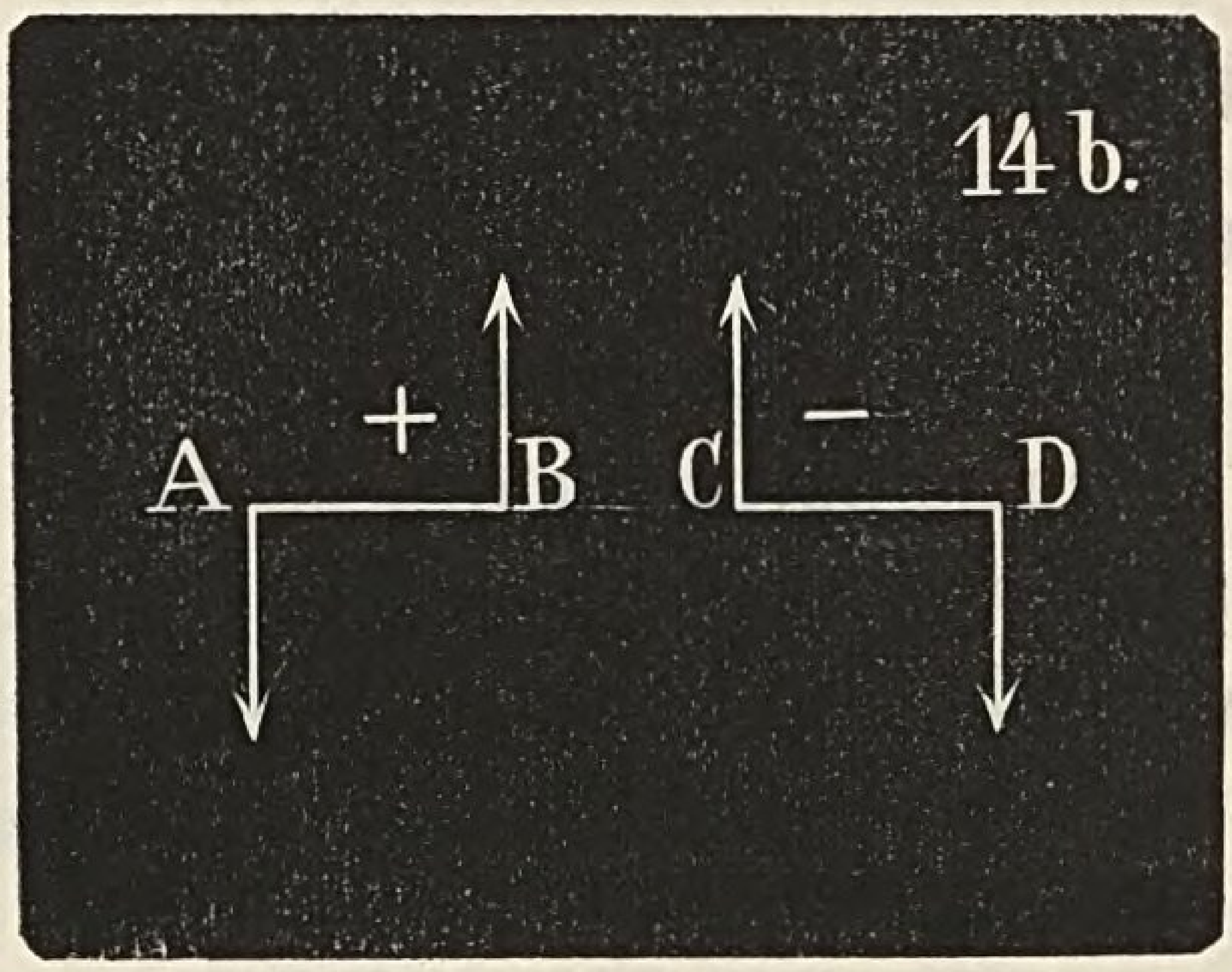


Kann der Arm des Kräftepaares so gelegt werden, daß seine Endpunkte mit den Angriffspunkten der Kräfte starr verbunden sind, so ist es auch physisch zulässig, die Kräfte an die Endpunkte des Armes zu verlegen. Außerdem gilt diese Verlegung, welche wir im folgenden stets vorgenommen denken, nur bedingungsweise (unter der *Annahme* einer starren Verbindung) und muß schließlich wieder rückgängig gemacht werden. Dem Abstande der wirklichen Angriffspunkte kommt eine mechanische Bedeutung nicht zu.

§ 43. **Lehrsatz.** Die Summe der statischen Momente der beiden Kräfte eines Kräftepaares ist für jeden Punkt der Ebene gleich groß und gleich dem Momente des Kräftepaares.

Beweis einfach.

Zusatz. Nimmt man in einer Ebene, welche man vertikal und senkrecht zur Meridianebene seines Aufenthaltsortes stellt und dann von Süden aus (das Angesicht nach Norden gewendet) betrachtet, zwei Kräftepaare an, welche gleich lange Arme und gleich große Kräfte haben, so kann man zwischen beiden doch noch einen Unterschied beobachten, welcher besonders deutlich hervortritt, wenn man die beiden Arme horizontal gelegt denkt. Es kann nämlich dann bei dem einen Kräftepaare die nach oben wirkende Kraft am rechten (östlichen) Ende des Armes angreifen, während sie bei dem anderen Kräftepaare am linken (westlichen) Ende des Armes wirkt.



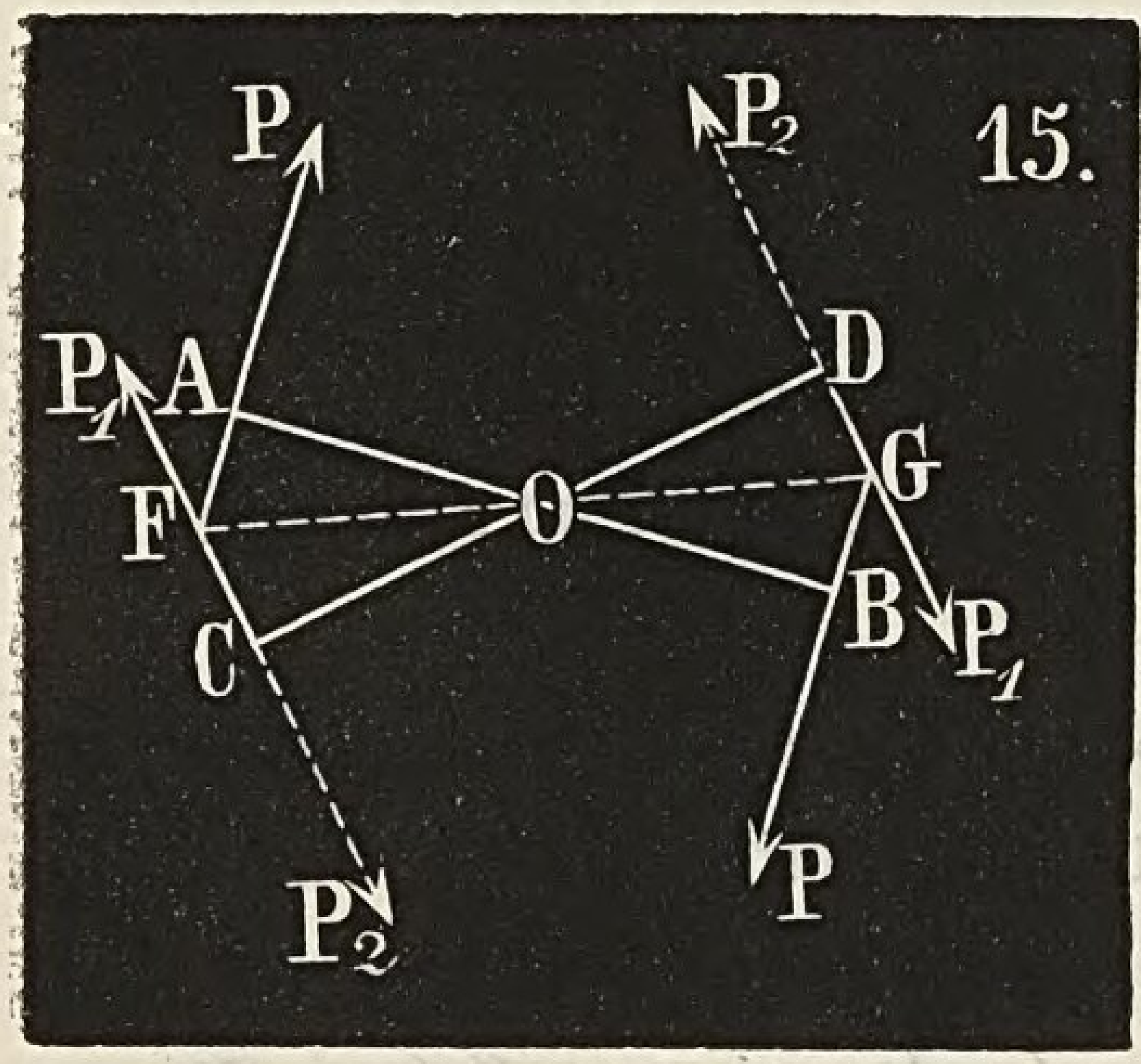
Dieser Unterschied drückt sich bei Herstellung der Summen der statischen Momente dadurch aus, daß diese (im übrigen gleichen) Summen verschiedene Vorzeichen bekommen. Und zwar wird das Vorzeichen bei dem erstgenannten Paare positiv, wenn man für die Kräfte die Richtung nach oben, und zugleich für die Perpendikel die Richtung nach rechts als die positive wählt.

Physikalisch sind die beiden Kräftepaare dadurch verschieden, daß sie ihre Arme in entgegengesetztem Sinne drehen. Indem nämlich die in A wirkende Kraft diesem Punkte eine abwärts gerichtete Geschwindigkeit erteilt, während gleichzeitig der Punkt B eine aufwärts gerichtete Geschwindigkeit von gleicher Größe erhält, ohne daß der Abstand AB selbst verändert wird, entsteht jene Bewegung des starren Systems, welche wir eine Drehung (um die Mitte von AB) nennen. Und

wenn wir dahin übereinkommen, diejenige Drehung, bei welcher der rechts liegende Endpunkt B des Armes (AB), oben herum nach links geht, eine Drehung von rechts nach links zu nennen, so ist es im Sinne der bisher über die Bedeutung der Vorzeichen gemachten Annahmen, die links drehenden Kräftepaare als positiv und somit die rechts drehenden als negativ in Rechnung zu bringen.

§ 44. **Lehrsatz.** Die Wirkung eines Kräftepaares wird nicht geändert, wenn man dasselbe, sobald nur die neue Lage mit der alten starr verbunden ist, um den Mittelpunkt seines Armes um einen beliebigen Winkel dreht.

Beweis. Sei (Fig. 15) AB·P das gegebene Paar. Legen wir durch den Mittelpunkt O einen zweiten Arm CD = AB und bringen wir sowohl in C als in D zwei neue und gleiche Kräfte $P_1 = P_2 = P$ senkrecht auf CD an, so wird dadurch an der Wirkung des gegebenen Paares nichts geändert. Denken wir uns andererseits die Kräfte P und P_2 nach ihren Schnittpunkten F und G verlegt, so haben sie Resultanten in der Richtung FO und GO, welche sich aufheben, weil sie gleich groß und in gerader Linie entgegengesetzt sind, und wir haben die Kräfte P_1 am Arme CD allein wirksam.



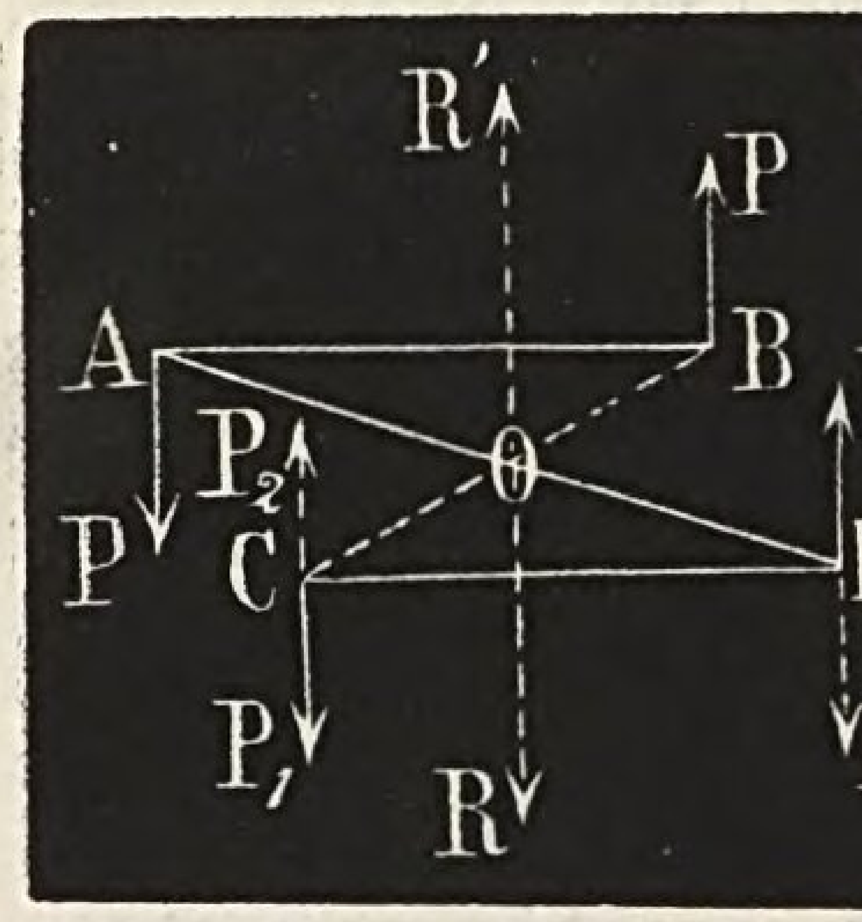
Dieses Kräftepaar kann man sich auch dadurch entstanden denken, daß das ursprüngliche Paar um den Winkel BOD gedreht wurde.

Das Detail des Beweises besteht in einigen Kongruenzen, welche sich leicht ergeben.

§ 45. **Lehrsatz.** Die statische Wirkung eines Kräftepaares wird nicht geändert, wenn man dasselbe parallel zu sich selbst in eine Lage verschiebt, welche mit der früheren starr verbunden ist.

Beweis. Es sei (Fig. 16) CD gleich und parallel AB, und die sowohl in C als in D senkrecht auf CD angebrachten Hilfskräfte $P_1 = P_2 = P$, außerdem sei A mit D, und B mit C starr verbunden, so ändern die eingeführten neuen Kräfte die Wirkung des gegebenen Paares AB·P nicht. Andrerseits lassen sich die in A und D wirkenden Kräfte P und P_2 durch ihre Resultante $R = P + P_2$ im Mittelpunkt O ersetzen; desgleichen die beiden in B und C wirkenden P und P_2 durch ihre Resultante $R' = P + P_2$ in demselben Punkte O. Die Kräfte R und R′ heben sich aber auf; mithin bleiben nur die Kräfte P_1 an dem Arme CD übrig, ein Kräftepaar, welches demnach die statische Wirkung des ursprünglichen Paares AB·P ersetzen kann.

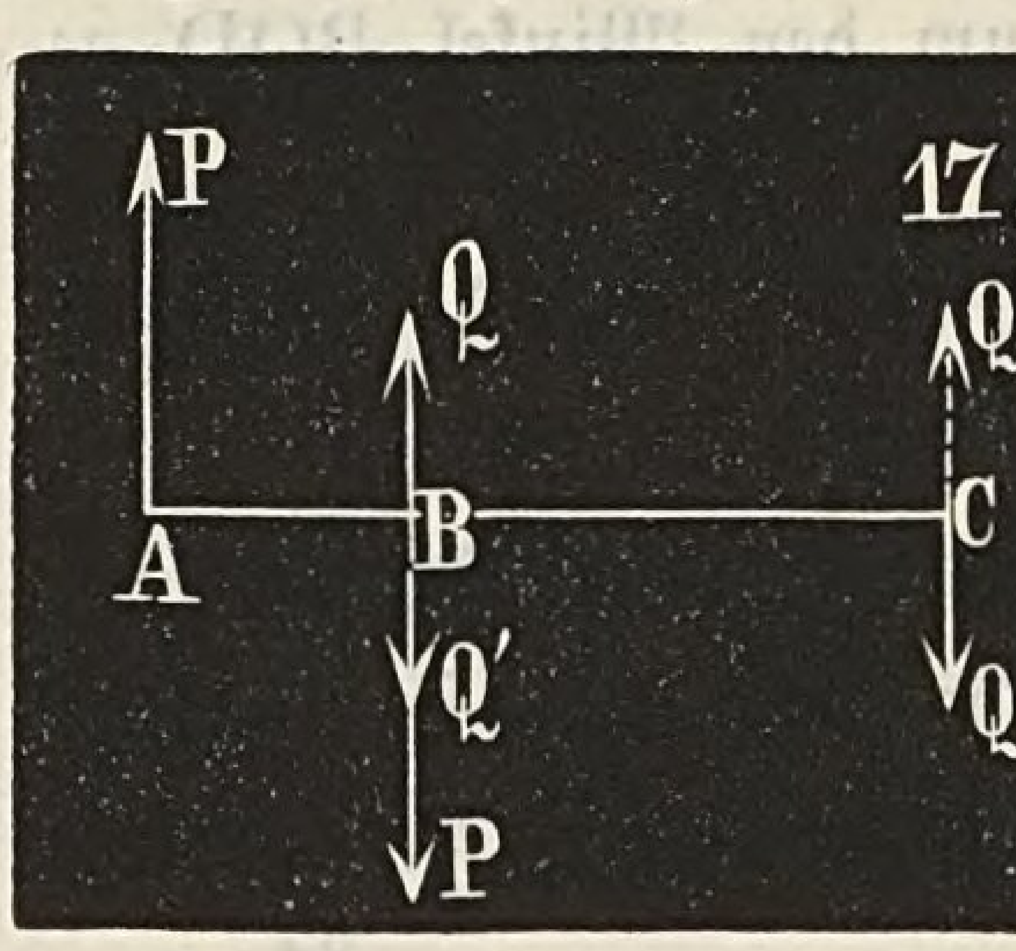
16.



§ 46. **Lehrsatz.** Kräftepaare, welche in parallelen starr verbundenen Ebenen wirken, können einander hinsichtlich ihrer statischen Wirkung ersetzen, wenn ihre Momente der Größe und dem Vorzeichen nach gleich sind.

Beweis. (Fig. 17.) Es sei ein Kräftepaar AB·P gegeben. Es soll bewiesen werden, daß dasselbe statisch durch das Kräftepaar BC·Q ersetzt werden kann, wenn BC·Q = AB·P ist und beide Paare in starr verbundenen parallelen Ebenen liegen. — Zunächst kann man nach § 44 und § 45 das gegebene Kräftepaar AB·P so drehen und verschieben, daß der Arm AB in die Verlängerung des Armes CB fällt. Dann bringt man sowohl in B als in C zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte von der Größe Q an, so ist das System der zwei Kräfte P durch das der 6 Kräfte P, P, Q, Q, Q′, Q′ ersetzt.

17.



Es haben aber die in A und C angreifenden Kräfte P und Q′ eine Resultante P + Q′, welche wegen AB·P = BC·Q in B an-

greift und demnach die daselbst (abwärts) wirkende Kraft $P + Q'$ aufhebt. Somit bleibt das Kräftepaar Q am Arme BC übrig als Ersatz für das ursprüngliche Paar $AB \cdot P$.

Zusatz. Sind die Momente zweier Kräftepaare gleich, und man ersetzt das eine derselben durch ein drittes, welches mit dem zweiten den gleichen Arm oder die gleiche Kraft hat, so wird das dritte Paar mit dem zweiten identisch.

§ 47. **Lehrsatz.** Kräftepaare, welche gleich große Momente von ungleichen Vorzeichen haben und in starr verbundenen parallelen Ebenen wirken, halten sich das Gleichgewicht.

Beweis. Reduziert man (nach § 46) die Kräftepaare auf den gleichen Arm, so werden die vier Kräfte gleich und je zwei derselben in den Endpunkten des gemeinschaftlichen Armes einander entgegengesetzt. —

§ 48. **Lehrsatz.** Kräftepaare, welche in starr verbundenen parallelen Ebenen wirken, haben ein resultierendes Kräftepaar, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Paare ist.

Beweis. Sind die Kräftepaare $P_1 a_1$, $P_2 a_2$, $(- P_3 a_3)$ $\ldots P_n a_n$ mit den Kräften P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$ an den Armen a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ gegeben, so lassen sich sämtliche Paare auf solche reduzieren, welche einen und denselben Arm z. B. a_1 haben. Die zugehörigen Kräfte werden dann

$$P_1,\ P_2 \frac{a_2}{a_1},\ - P_3 \frac{a_3}{a_1},\ \ldots P_n \frac{a_n}{a_1}$$

an dem einen Endpunkte des Armes und

$$- P_1,\ - P_2 \frac{a_2}{a_1},\ + P_3 \frac{a_3}{a_1} \ldots - P_n \frac{a_n}{a_1}$$

am andern Endpunkte. Diese Kräfte haben, jede Gruppe längs derselben Geraden, die durch ihre Vorzeichen angegebenen relativen Richtungen. Folglich erhält man ein Kräftepaar am Arme a_1 mit der Kraft

$$P_1 + P_2 \frac{a_2}{a_1} - P_3 \frac{a_3}{a_1} + \ldots + P_n \frac{a_n}{a_1},$$

und das Moment dieses Paares ist

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 - P_3 a_3 + \ldots P_n a_n .$$

Zusatz. Unter einer beliebigen Anzahl von Kräftepaaren, welche in starr verbundenen parallelen Ebenen wirken, besteht demnach Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer Momente Null ist.

Viertes Kapitel.

Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen.

§ 49. **Bedingungen des Gleichgewichts paralleler und antiparalleler Kräfte, deren Richtungen in einer Ebene liegen.**

Liegen die Richtungen der parallelen Kräfte

$$P_1, P_2, -P_3, -P_4, \ldots P_n$$

in einer Ebene, so besteht Gleichgewicht, wenn zugleich die algebraische Summe der Kräfte Null ist.

$$\Sigma (P) = 0$$

und die algebraische Summe der auf einen beliebigen Punkt der Ebene bezogenen statischen Momente Null ist.

$$\Sigma (Pa) = 0$$

Beweis. Wenn die erste Bedingung [$\Sigma (P) = 0$] erfüllt ist, ist das ganze System der parallelen Kräfte auf zwei gleich große Kräfte [$\Sigma (+P) = \Sigma (-P)$] von entgegengesetzter Richtung zurückgeführt. Diese Kräfte bilden im allgemeinen ein Kräftepaar, dessen Moment (nach § 43) gleich der Summe der statischen Momente beider Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene ist. Diese Summe ist aber (nach § 38) gleich der algebraischen Summe aller statischen Momente der Einzelkräfte. Ist diese Null, so ist demnach auch das Moment des resultierenden Paares Null, folglich besteht Gleichgewicht.

§ 50. **Gleichgewichtsbedingungen für beliebige Kräfte, deren Richtungen in einer Ebene liegen.**

Es seien die Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$ gegeben, deren Angriffspunkte die Koordinaten

$$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$$

$$y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$$

haben, und deren Richtungen mit der Abscissenachse (der x) die von dieser Achse aus nach dem positiven Teile der Ordinatenachse zu herumgezählten Winkel

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_3 \ldots \alpha_n$$

bilden. Dann besteht Gleichgewicht, wenn zugleich

1) die algebraische Summe der Projektionen der Kräfte auf die Abscissenachse (die Summe der X-Komponenten) gleich Null ist:

$$\Sigma(P\cos\alpha) = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots P_n\cos\alpha_n = 0,$$

2) die algebraische Summe der Projektionen der Kräfte auf die Ordinatenachse (die Summe der Y-Komponenten) gleich Null ist:

$$\Sigma(P\sin\alpha) = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + \ldots P_n\sin\alpha_n = 0,$$

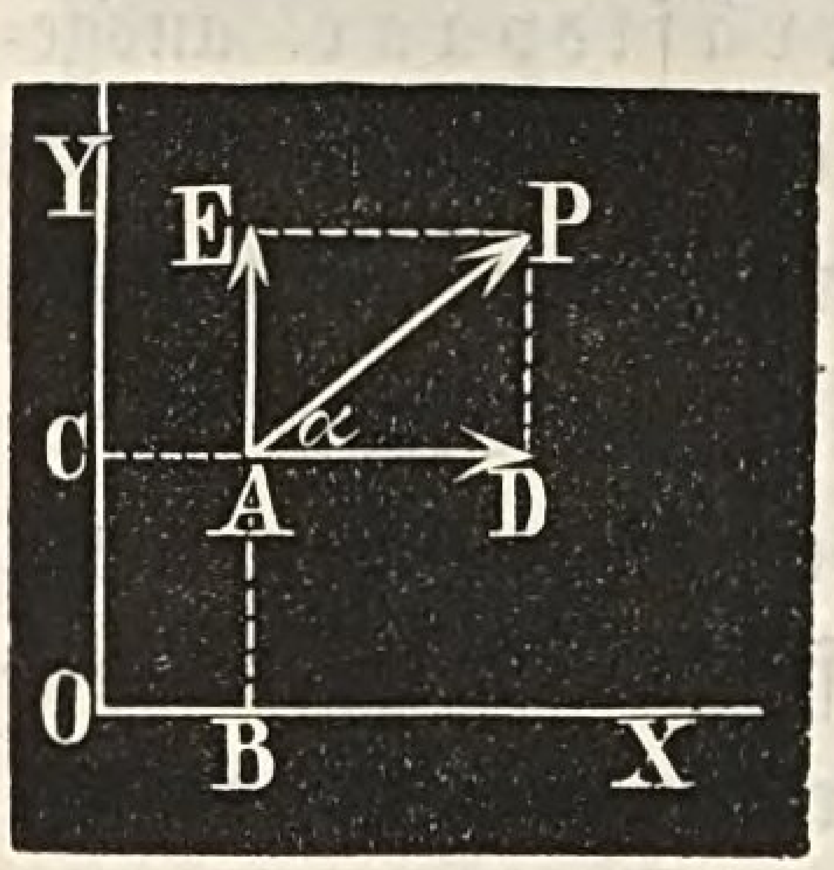
3) die algebraische Summe der auf den Ursprung bezogenen statischen Momente der Y-Komponenten, vermindert um die algebraische Summe der statischen Momente der X-Komponenten, gleich Null ist:

$$0 = \Sigma(x\,P\sin\alpha) - \Sigma(y\,P\cos\alpha)$$

$$= P_1(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1) + P_2(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)$$
$$+ P_3(x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3) + \ldots P_n(x_n\sin\alpha_n - y_n\cos\alpha_n)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für diesen allgemeineren Fall sind demnach um die unter 3) aufgeführte Bedingung gegenüber den im § 28 für das Gleichgewicht an einem Punkte aufgestellten Bedingungen vermehrt.

Beweis. (Fig. 18) Sei P eine beliebige Kraft in der Ebene XOY, α ihr Winkel mit OX, und A ihr Angriffspunkt, so können wir P in zwei rechtwinkelige Komponenten, AD = P cos α, AE = P sin α zerlegen, die Angriffspunkte dieser Komponenten nach C und B verlegen, und zugleich in O vier Kräfte anbringen, von welchen zwei gleich und parallel mit AD aber einander entgegengesetzt, die beiden anderen gleich und parallel mit AE und ebenfalls einander entgegengesetzt sind.



Figur 18.

Dadurch erhalten wir in O zwei Kräfte P cos α, P sin α und zwei Kräftepaare, nämlich x · P sin α in OX und y · P cos α in OY, wenn wir die Koordinaten OB = x und OC = y setzen. Diese zwei Paare sind sowohl in Fig. 18 als auch in jedem anderen Falle von entgegengesetztem Sinne der Drehung und geben ein Paar, dessen Moment

$$x\,P \sin\alpha - y\,P \cos\alpha = P\,(x \sin\alpha - y \cos\alpha)$$

ist. Wir haben demnach die Kraft P in A durch zwei Kräfte in O und ein Kräftepaar ersetzt.

Zerlegen wir sämtliche Kräfte auf dieselbe Art, so haben wir n Kräfte in O längs der Geraden OX und n Kräfte in O längs der Geraden OY wirkend und n Kräftepaare.

Damit Gleichgewicht bestehe, muß zunächst die Resultante der 2 n in O angreifenden Kräfte Null sein, was die unter 1) und 2) formulierten Bedingungen hereinbringt. Sodann muß auch noch das Moment des resultierenden Kräftepaares Null sein, was durch die dritte Bedingung ausgedrückt ist.

§ 51. **Diskussion der Gleichgewichtsbedingungen.** Ist eine der aufgestellten drei Bedingungen nicht erfüllt, so besteht kein Gleichgewicht zwischen den Kräften. Sie haben dann im allgemeinen eine statische Resultante (R), so daß durch Hinzufügen einer weiteren Kraft (R_1) Gleichgewicht hergestellt werden kann. Nur in dem einen Falle, in welchem die ersten beiden Bedingungen [$\Sigma\,(P \cos\alpha) = 0$ und $\Sigma\,(P \sin\alpha) = 0$] zugleich erfüllt sind, während die dritte nicht erfüllt ist, ist die Gesamtwirkung der Kräfte durch ein Kräftepaar ausgedrückt, dessen Moment durch die auf der rechten Seite der dritten Gleichung stehende, nun von Null verschiedene Summe gegeben ist.

Während die zweite der eben aufgestellten Behauptungen unmittelbar einleuchtet, bedarf die erste des Beweises, weil es ohne weiteres nicht deutlich ist, daß die beiden Kräfte $\Sigma\,(P \cos\alpha)$ und $\Sigma\,(P \sin\alpha)$ samt dem Kräftepaare der dritten Gleichung bezüglich des Gleichgewichts durch eine Kraft ersetzt werden können.

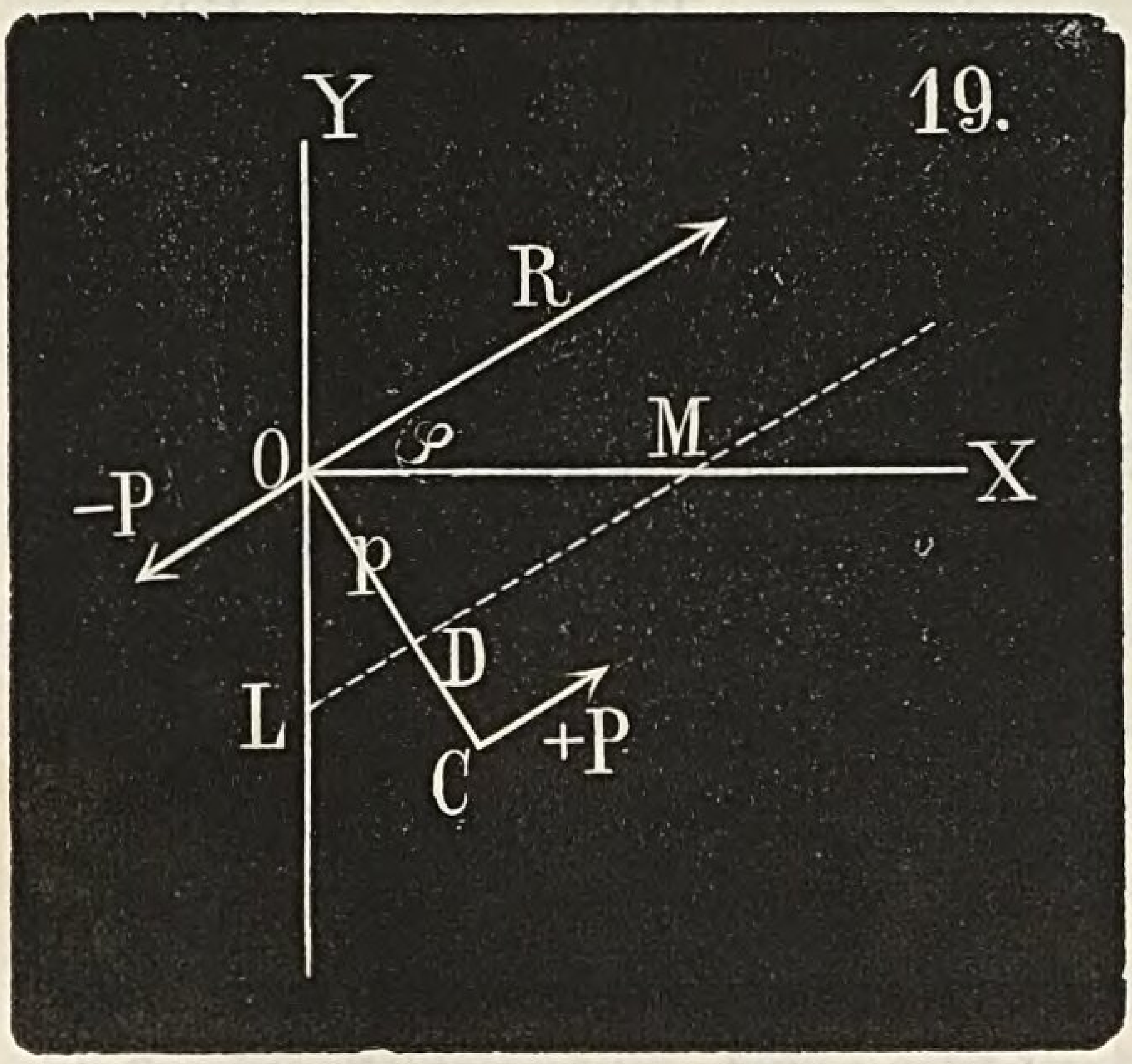
Beweis. Setzt man zur Abkürzung $X = \Sigma\,(P \cos \alpha)$, $Y = \Sigma\,(P \sin \alpha)$, so ist die Resultante dieser beiden in O angreifenden Kräfte

$$R = \sqrt{Y^2 + X^2} \quad (4).$$

Dieselbe bildet mit der x Achse einen Winkel φ, zu dessen Bestimmung dient, daß

$$\cos \varphi = \frac{X}{R}, \quad \sin \varphi = \frac{Y}{R} \quad (5.)$$

Das Kräftepaar, dessen Moment durch die rechte Seite der dritten Gleichung gegeben ist, soll die Kräfte ($\pm$ P) und den Arm p haben. Dasselbe läßt sich in seiner Ebene um den einen Endpunkt O seines Armes so drehen, daß die Kräfte ($\pm$ P) mit R parallel werden, also der Arm p auf der Richtung von R senkrecht steht. (Fig. 19.)



Nun hat man drei, oder mit Rücksicht darauf, daß die eine der Kräfte des Paares mit R in gerader Linie liegt, nur zwei Parallelkräfte, deren algebr. Summe (R + P — P) = R ist. Diese zwei, wenn antiparallel, notwendig ungleichen Parallelkräfte haben nach § 38 eine Resultante von der Größe R, welche mit der Abscissenachse den durch die Gleichungen (5) bestimmten Winkel bildet, während die Lage ihrer Angriffslinie durch folgende Betrachtung ermittelt wird.

Durchschneidet die Angriffslinie der Gesamtresultante R die Lage OC der Strecke p im Punkte D, so ist nach dem Satze von den statischen Momenten in bezug auf den Punkt O

$$R \cdot \overline{OD} = Pp,$$

und die Resultante schneidet somit die Abscissenachse in einem Punkte M, welcher vom Ursprunge O um

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OD}}{\sin \varphi}$$

absteht, und die Ordinatenachse in einem Punkte L, welcher vom Ursprunge O um

$$-\overline{OL} = \frac{\overline{OD}}{\cos \varphi}$$

absteht.

Setzt man $\overline{x}$ für die Abscisse (OM) und $\overline{y}$ für die Ordinate $\overline{OL}$ am Ursprung, und substituiert den Wert von OD, so wird

$$\overline{x} = \frac{Pp}{R \sin \varphi}, \quad -\overline{y} = \frac{Pp}{R \cos \varphi}$$

oder nach Gl. 5

$$\overline{x} = \frac{Pp}{Y} = \frac{Pp}{\Sigma (P \sin \alpha)}, \quad \overline{y} = -\frac{Pp}{X} = -\frac{Pp}{\Sigma (P \cos \alpha)}$$

Hiermit ist auch die Lage der Resultante R soweit bestimmt, als sie überhaupt bestimmt werden kann. Der Angriffspunkt der Resultante bleibt auch hier insoferne unbestimmt, als jeder von der Angriffslinie getroffene dem starren Systeme der materiellen Punkte angehörige Punkt als Angriffspunkt gewählt werden kann. Ist ein solcher Punkt nicht vorhanden, dann gibt es auch keine Resultante, und das Gleichgewicht kann durch eine Kraft nicht hergestellt werden.

Zusatz. Ist Y = O, während Pp einen bestimmten Wert hat, so ist die Resultante von der Größe X und, wegen $\overline{x} = \infty$, der Abscissenachse parallel, während sie die Ordinatenachse in dem Punkte schneidet, der um

$$\overline{y} = -\frac{Pp}{\Sigma (P \cos \alpha)}$$

von O absteht. Ebenso schließt man, daß die Resultante der Ordinatenachse parallel ist, wenn X = o, und daß sie die Abscissenachse in der Entfernung

$$\overline{x} = \frac{Pp}{\Sigma (P \sin a)}$$

durchschneidet. Diese Schlüsse können leicht direkt bestätigt werden.

Ist $Pp = o$, so geht die Resultante durch den Ursprung O.

§ 52. Sind die **beliebig im Raume** gelegenen materiellen Punkte A, B, C, D ..... N mit einander in starrer Verbindung, und von den parallelen Kräften P_1, P_2, P_3, P_4 .... P_n angegriffen, so gilt folgendes:

1) die Kräfte haben eine Resultante (R), deren Größe gleich der Summe der Kräfte ist

$$R = \Sigma (P),$$

2) die Resultante ist den Kräften parallel,

3) die Kräfte haben einen Mittelpunkt.

Der Beweis dieser drei Behauptungen ergibt sich aus der Erwägung, daß die beiden Kräfte P_1 und P_2 in einer Ebene liegen und somit eine ihnen parallele Resultante (Q_1) von der Größe ($P_1 + P_2$) haben sowie einen Mittelpunkt (M_1), der auf der Verbindungslinie (AB) ihrer Angriffspunkte liegt. Die Resultante Q_1 und die Kraft P_3 haben eine Resultante Q_2, welche die Größe $(Q_1 + P_3) = (P_1 + P_2 + P_3)$ hat und ebenfalls den Kräften (P) parallel ist. Der Mittelpunkt (M_2) von Q_1 und P_3, welcher zugleich der Mittelpunkt von P_1, P_2, P_3 ist, liegt auf der Geraden M_1C u. s. f.

§ 53. **Um den Mittelpunkt der Parallelkräfte zu finden,** verlegen wir die Angriffspunkte sämtlicher Kräfte in eine mit dem System der Angriffspunkte fest verbundene, zur Richtung der Kräfte senkrechte Ebene (E_1) und denken uns dann sämtliche Kraftrichtungen um 90^0, also in diese Ebene (E_1) gedreht. Dann ist der Fall des § 40 gegeben. Haben in der Ebene E_1 die Projektionen der ursprünglichen Angriffspunkte A, B, C, D .... N in bezug auf zwei zu einander senkrechte Koordinatenachsen die Koordinaten

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \dots x_n$$

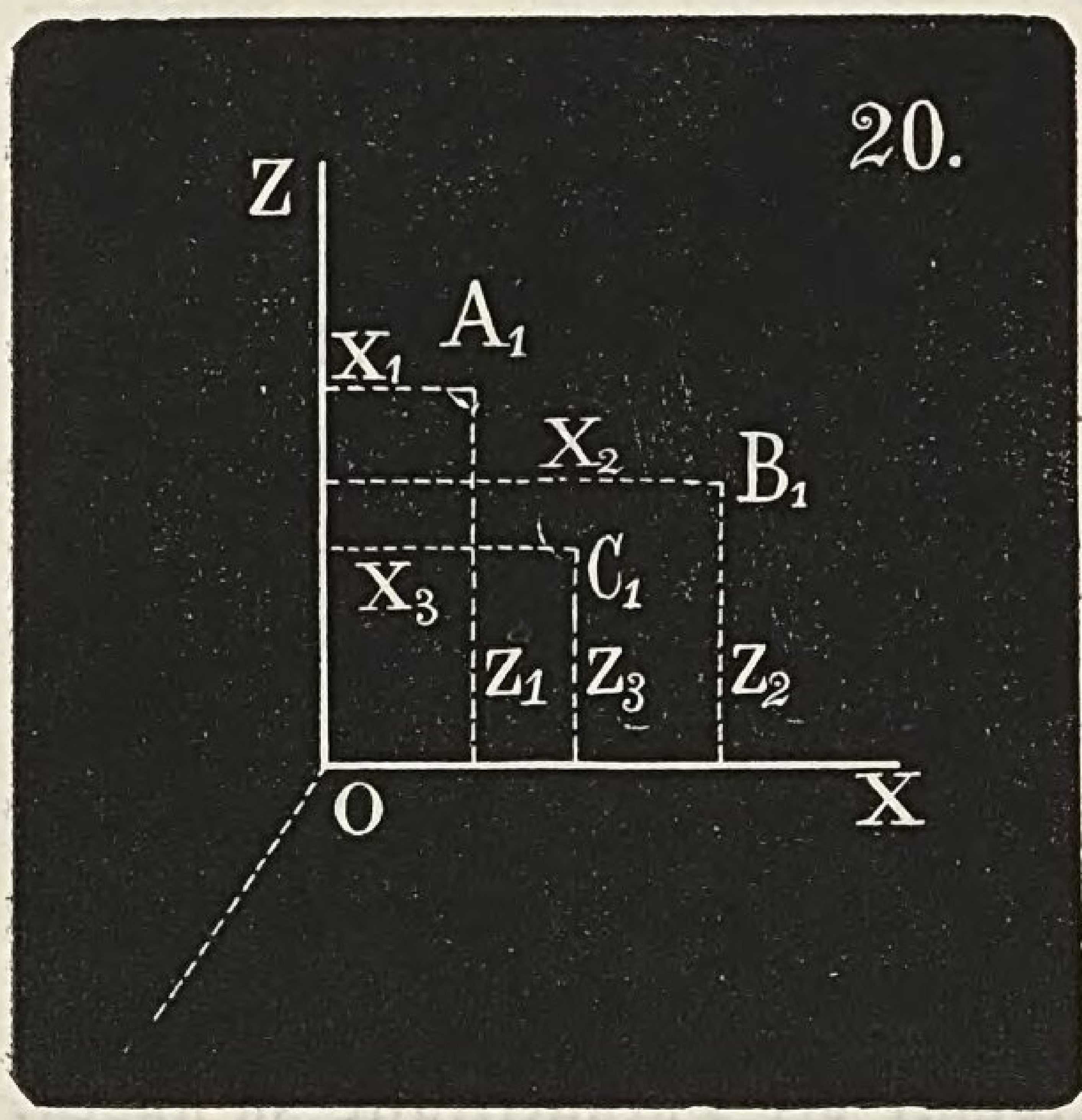
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \dots y_n$$

so hat der Mittelpunkt unserer in der Ebene E_1 liegenden Parallelkräfte (nach § 40) die Koordinaten

$$\overline{x} = \frac{\Sigma\,(Px)}{\Sigma\,(P)},\quad \overline{y} = \frac{\Sigma\,(Py)}{\Sigma\,(P)}.$$

Durch diesen Punkt geht die Angriffslinie der Resultante $\Sigma\,(P)$ auch dann, wenn man die Kräfte (P) wieder in ihre ursprüngliche zur Ebene E_1 senkrechte Lage zurückdreht. Somit ist die Angriffslinie der Resultante bestimmt für den einen Fall, daß die Kräfte zur Ebene E_1 senkrecht stehen.

Errichtet man auf der Ebene E_1 in der Koordinatenachse OX (Fig. 20) eine zweite Ebene E_2 senkrecht zu E_1, begrenzt dieselbe durch eine in O zu OX senkrechte Gerade OZ, und bezeichnet mit



$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4 \ldots . z_n$$

die der OZ parallelen Abstände der Punkte A, B, C, D .... N von der Ebene E_1, so hat eine Drehung der Kräfte (P) um ihre Angriffspunkte in die zur Ebene E_2 senkrechte Richtung zur Folge, daß die Richtungslinien der Kräfte die Ebene E_2 in Punkten A^1, B^1, C^1 .... schneiden, welche von der Achse OX um

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4 \ldots . z_n$$

und von der Achse OZ um

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ldots . x_n$$

entfernt sind.

Man verlegt die Kräfte in diese Punkte, dreht sie um 90° in die Ebene E_2, so hat der Mittelpunkt dieser in E_2 liegenden Parallelkräfte nach § 40 die Koordinaten

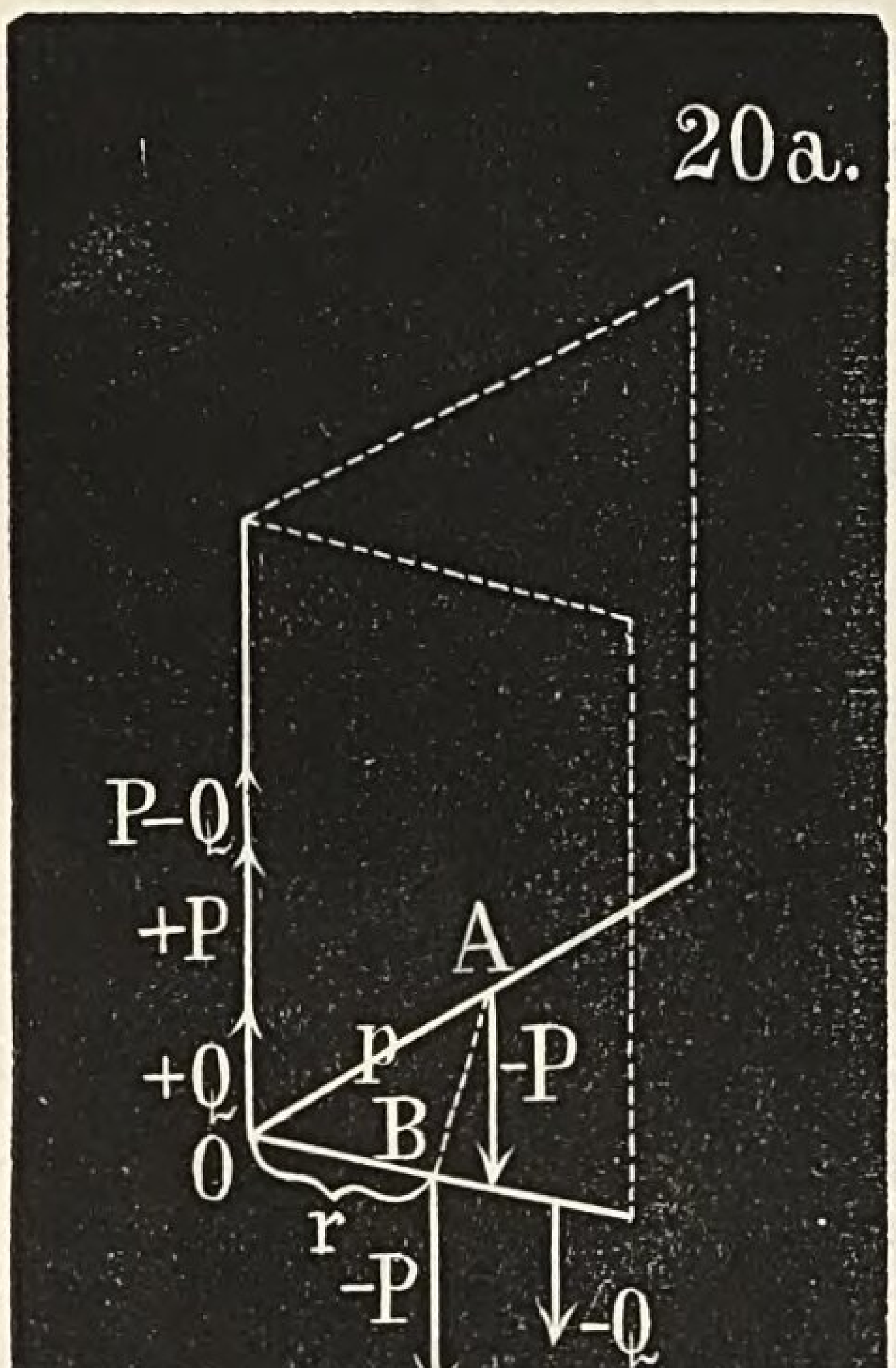
$$\overline{x} = \frac{\Sigma\,(Px)}{\Sigma\,(P)},\quad \overline{z} = \frac{\Sigma\,(Pz)}{\Sigma\,(P)}.$$

Durch diesen Punkt geht die Angriffslinie der Resultante $\Sigma\,(P)$ auch dann, wenn die Kräfte auf der Ebene E_2 senkrecht stehn.

Die beiden zu den Ebenen E_1 und E_2 senkrechten Angriffslinien der Resultante sind aber zwei Lagen dieser Resultante, von welchen die eine ihr ursprünglich zukommt, während sie die andere dadurch erreicht, daß die Kräfte um ihren Angriffspunkt um 90° gedreht werden. Die beiden Angriffslinien schneiden sich demnach im Mittelpunkte der Parallelkräfte und dieser ist dadurch bestimmt, daß er von der (willkürlich angenommenen) Ebene E_1 um die Strecke $\overline{z}$ absteht, während zugleich seine Projektion in diese Ebene von den (gleichfalls willkürlich angenommenen) Achsen ox und oy um die Strecken $\overline{y}$ und $\overline{x}$ entfernt ist.

Sobald außer den Größen der Einzelkräfte noch die Angriffspunkte derselben, jeder durch seine drei Raumkoordinaten x, y, z, gegeben sind, lassen sich demnach die drei Raumkoordinaten $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ des Mittelpunktes berechnen.

§ 54. Zu zwei Kräftepaaren (Pp und Qq), deren Ebenen E_1, E_2 nicht parallel sind, das resultierende Paar zu finden. (Fig. 20a.)



Man legt eine Ebene (E) senkrecht zum Durchschnitt der beiden Ebenen E_1, E_2 und bringt durch Anwendung der Sätze in § 44 und § 45 die Arme p, q der beiden Paare in die Durchschnitte der Ebenen E_1, E_2 mit der Ebene E. Dann stehen die vier Kräfte $\pm$ P, $\pm$ Q auf der Ebene E senkrecht, zwei derselben, in der Figur + Q, + P liegen im Durchschnitte der Ebenen.

Man kann nun nach § 46 die Kraft des einen Kräftepaares (Q) auf die des andren (P) reduzieren, indem man dem Kräftepaare Qq die

Kraft P und den Arm $r = \frac{Q}{P} q$ gibt. Dann hat man in den Endpunkten A und B der Arme p und r gleiche Kräfte von der Größe P. a) Sind die Kräfte wie in Figur 21 auch gleich gerichtet, so greift ihre Resultante von der Größe (— 2 P) in der Mitte von $\overline{AB}$ an und bildet mit (+ 2 P) in O das resultierende Kräftepaar, dessen Arm gleich der halben Diagonale desjenigen Parallelogramms ist, dessen Seiten die Arme p und r sind, welche den Winkel α der Ebenen E_1, E_2 einschließen.

Das Moment dieses resultierenden Paares wird somit auch gefunden, wenn man die Kraft P mit der ganzen Diagonale d des beschriebenen Parallelogrammes multipliziert.

Da $d = \sqrt{p^2 + r^2 + 2pr\cos\alpha}$, $r = \frac{Q}{P} q$, so folgt für das resultierende Moment Mm

$$Mm = Pd = P \sqrt{p^2 + \frac{(Q.q)^2}{P^2} + 2 p \frac{Qq}{P} \cos\alpha}$$

$$Mm = \sqrt{(Pp)^2 + (Qq)^2 + 2 (Pp)(Qq) \cos\alpha}$$

Das Moment des resultierenden Kräftepaares wird demnach aus den Momenten der Seitenpaare und dem von ihnen eingeschlossenen Flächenwinkel ebenso gefunden wie die resultierende Kraft aus ihren Komponenten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel.

Der Flächenwinkel γ, den die Ebene des resultierenden Paares mit der Ebene des Paares Qq bildet, ist gegeben durch

$$\sin\gamma = \frac{p}{d}\sin\alpha = \frac{Pp}{Mm}\sin\alpha$$

und der Flächenwinkel β, den die Ebene des resultierenden Paares mit der Ebene des Paares Pp bildet, durch

$$\sin\beta = \frac{Qq}{Mm}\sin\alpha$$

b) Sind die Kräfte entgegengesetzt, so heben sie sich in O auf und geben ein Kräftepaar am Arme AB, dessen Moment gegeben ist durch den Ausdruck

$$\sqrt{(Pp^2 + (Qq)^2 - 2 (Pp)(Qq) \cos\alpha},$$

welcher sich von dem unter a) für Mm gefundenen nur durch das Vorzeichen des letzten Gliedes unterscheidet und somit aus diesem erhalten wird, wenn man dem entgegengesetzten Sinne der Drehung beider Paare durch entgegengesetzte Vorzeichen der Momente (Pp), (Qq) Rechnung trägt. Das unter a) Gefundene ist somit der allgemeine Ausdruck für das Moment des resultierenden Paares, wenn man von den Vorzeichen den eben genannten Gebrauch macht.

Zusatz. Jedes Kräftepaar vom Momente (Mm) läßt sich durch zwei Kräftepaare ersetzen, welche in zwei verschiedenen den Winkel α miteinander bildenden Ebenen wirken, wenn die Momente (Pp), (Qq) der beiden Paare und der Winkel α der Gleichung

$$(Mm)^2 = (Pp)^2 + (Qq)^2 + 2\,(Pp)\,(Qq) \cos \alpha$$

genügen. Das hier gewählte Vorzeichen (+) des letzten Gliedes bezieht sich auf den Fall, daß die Paare in gleichem Sinne drehen, sobald man die Ebenen zusammenklappt ($\alpha = o$). Auch Paare von verschiedenem Sinne der Drehung sind zulässig, wenn man dem letzten Gliede das Vorzeichen (—) gibt.

§ 55. Gegeben sind n Kräfte, deren Angriffspunkte beliebig über ein starres System im Raume verteilt sind. Es sollen die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden.

Die n Kräfte von der Größe

$$P_1, P_2, P_3 \ldots . P_n$$

sind dadurch gegeben, daß für jede derselben die drei Raumkoordinaten ihrer Angriffspunkte

$$x_1, x_2, x_3 \ldots . x_n$$

$$y_1, y_2, y_3 \ldots . y_n$$

$$z_1, z_2, z_3 \ldots . z_n$$

und die Winkel bekannt sind, welche die Kraftrichtungen beziehungsweise mit den Koordinatenachsen der x, y, z bilden, nämlich

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots . \alpha_n$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots . \beta_n$$

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots . \gamma_n .$$

Man zerlegt jede Kraft in drei Komponenten, welche den Achsen parallel sind, z. B. P_1 in $X_1 = P_1 \cos \alpha_1$, $Y_1 = P_1 \cos \beta_1$, $Z_1 = P_1 \cos \gamma_1$.

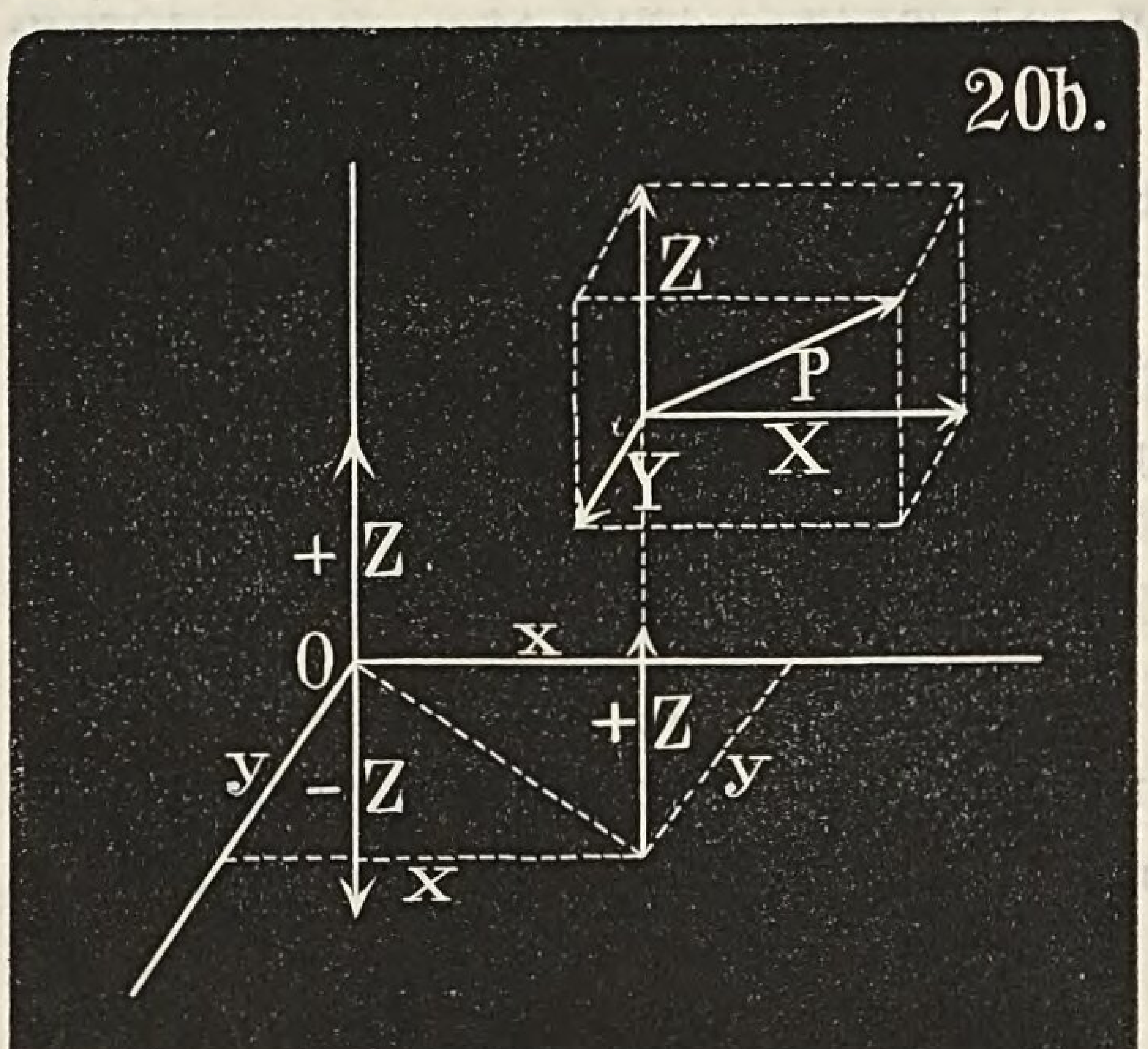
Den Angriffspunkt jeder dieser Komponenten verlegt man in diejenige Koordinatenebene, auf welcher sie senkrecht steht, also X_1 in die Ebene der yz, Y_1 in xz, Z_1 in xy.

Man bringt nun im Ursprung O zu jeder dieser Kräfte zwei gleiche entgegengesetzte an. Dadurch erhält man in O die Kräfte

$X_1 + X_2 + X_3 \ldots . X_n$ längs der x = Achse,
$Y_1 + Y_2 + Y_3 \ldots . Y_n$ „ „ y = Achse,
$Z_1 + Z_2 + Z_3 \ldots . Z_n$ „ „ z = Achse,

ferner ebensoviele Kräftepaare, von welchen das in der Figur (20b) gezeichnete die Kraft Z_1 und einen Arm von der Größe $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ hat. Dieses Paar kann nach § 54 in zwei Kräftepaare Z_1x_1 und Z_1y_1 zerlegt werden, welche in den beiden der Kraft Z_1 parallelen Ebenen der xz und yz liegen.

Ebenso gibt die Kraftkomponente Y_1 zwei Kräftepaare $= Y_1x_1$ und Y_1z_1 in den beiden Ebenen der xy und yz, und die Komponente X_1 zwei Paare X_1y_1 und X_1z_1 in den Ebenen der xy und xz.



Da 3n Kraftkomponenten vorhanden sind, und jede 2 Paare liefert, so erhält man 6n Kräftepaare, von welchen je 2n in der einzelnen Koordinaten-Ebene liegen. Die Drehungsmomente der Paare X_1y_1 u. Y_1x_1, welche in der Ebene der xy liegen, sind einander entgegengesetzt, ebenso wie jedes andere Paar

von Kräftepaaren, welches von derselben Kraft (P_1) in dieselbe Koordinatenebene geliefert wird. Das resultierende Moment dieser beiden Kräftepaare ist somit ($X_1y_1 - Y_1x_1$), und man erhält in der Ebene der xy ein resultierendes Paar, dessen Moment ist

$$\Sigma [Xy - Yx]$$
$$= (X_1y_1 - Y_1x_1) + (X_2y_2 - Y_2x_2) + \ldots\ldots (X_n y_n - Y_n x_n).$$

Ebenso ist das Moment des resultierenden Paares in der xz-Ebene

$$\Sigma [Xz - Zx],$$

und das Moment des resultierenden Paares in der yz-Ebene

$$\Sigma [Yz - Zy].$$

Zum Gleichgewichte ist offenbar hinreichend, daß sowohl die Resultante der in O angreifenden Kräfte Null ist, als auch das Moment des resultierenden Paares. Nun ist aber nach § (29) die Resultante

$$R^2 = [\Sigma (X)]^2 + [\Sigma (Y)]^2 + [\Sigma (Z)]^2,$$

und es folgen aus $R = o$ die drei Gleichungen:

$$\Sigma (X) = o, \Sigma (Y) = o, \Sigma (Z) = o.$$

Damit also die erste Bedingung ($R = o$) erfüllt sei, müssen die drei Kräftesummen einzeln Null sein.

Für die Kräftepaare gilt folgendes:

Die beiden Paare $\Sigma [Xy - Yx]$ und $\Sigma [Xz - Zx]$ geben nach § 54, da

$\cos \alpha = 0$, ein resultierendes Paar, dessen Moment ist

$$M_1m_1 = \sqrt{[\Sigma (Xy - Yx)]^2 + [\Sigma (Xz - Zx)]^2}.$$

Da die Ebene dieses Paares durch die x-Achse geht, so steht sie senkrecht auf der Ebene der yz, und es setzt sich das Paar M_1m_1 mit dem in yz liegenden Paare ebenfalls nach § 54 und unter der Bedingung $\cos \alpha = o$ zu einem resultierenden Paare zusammen, dessen Moment

$$Mm \quad \sqrt{(M_1m_1)^2 + [\Sigma (Yz - Zy)]^2}$$

ist. Somit kann auch Mm nicht Null werden, ohne daß zu-

gleich jedes einzelne der drei in den Koordinaten-Ebenen liegenden Paare Null ist: d. h. es ist für das Gleichgewicht nicht nur hinreichend sondern auch erforderlich, daß zugleich

$$\Sigma(Xy - Yx) = o, \Sigma(Xz - Zx) = o, \Sigma(Yz - Zy) = o.$$

Fünftes Kapitel.
Vom Schwerpunkt.

§ 56. Jeder sich selbst überlassene Körper fällt erfahrungsgemäß zu Boden in einer Richtung*), welche dem Mittelpunkt der Erde zugekehrt ist. Die Ursache dieser Erscheinung ist die Anziehungskraft der Erde, welche Schwerkraft oder Schwere genannt wird. Diese Kraft ist so wesentlich mit der Materie eines jeden Körpers verbunden, daß sie durch nichts von ihr getrennt, wohl aber durch eine ihr gleiche Gegenkraft aufgehoben werden kann, wie dies im Zustande der Ruhe der Fall ist. Diese Kraft zieht nicht bloß den Körper überhaupt, sondern jedes Massenteilchen desselben mit der gleichen Intensität an. In einem Körper, den wir uns aus n Massenteilchen bestehend vorstellen, sind auch n Kräfte thätig, deren Richtungen nach dem Mittelpunkte der Erde konvergieren. Die horizontale Ausdehnung eines Körpers ist indessen gegenüber dem Erdradius so gering, daß man jene Richtungen in den meisten Fällen als parallel betrachten darf. Obwohl ferner die Schwerkraft mit der Entfernung vom Mittelpunkte veränderlich wird, so ist doch die Erhebung unseres Spielraumes über die Erdoberfläche gegen den Erdradius so gering, daß an einem bestimmten Orte diese Kraft konstant, d. h. von der Höhe unabhängig gelten kann. Weil nach § 52 parallele Kräfte stets eine Mittelkraft haben, so können wir uns auch vorstellen, ein jeder Körper werde nur von einer Kraft angezogen, welche der Summe aller einzelnen Kräfte gleich, nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet ist und durch den Mittelpunkt der parallelen Kräfte geht. Jede Kraft, welche einen Körper im Fallen hindert, muß

---

*) Diese Richtung heißt vertikal oder lotrecht, die darauf senkrechte horizontal oder wagrecht.

dieser Mittelkraft gleich und in gerader Linie entgegengesetzt sein. Beim Aufhängen offenbart sich diese Kraft als Spannung, im Ruhen auf einer Unterlage als Druck.

Ein jeder Körper hat für seine Schwerkräfte nur einen Mittelpunkt und dieser Punkt heißt der Schwerpunkt des Körpers. Der Schwerpunkt eines starren Körpers hat somit die Bedeutung, daß er bei jeder beliebigen Lage des Körpers in Verbindung mit dem Mittelpunkte der Erde die gerade Linie bestimmt, in welcher die Resultante aller Schwerkräfte wirkt und somit auch diejenige Kraft, welche der Schwere gegenüber den Körper im Gleichgewicht hält.

§ 57. **Masse und Gewicht.** Die Größe der Kraft, mit welcher ein Körper von der Erde angezogen wird, heißt sein Gewicht. Bezeichnen wir dasselbe mit G, die Masse des Körpers mit m, die der Erde mit M, den Radius derselben mit r und mit q eine Konstante*), so haben wir nach dem allgemeinen Anziehungsgesetze

$$G = q. \frac{mM}{r^2}\text{**)}$$

als Ausdruck des Gewichtes eines Körpers an der Erdoberfläche. Für einen zweiten Körper vom Gewichte g und der Masse m_1 ist analog

$$g = q. \frac{m_1 M}{r^2}; \text{ mithin}$$

$$(1)\ G : g = m : m_1$$

d. h. die Gewichte der Körper verhalten sich wie ihre Massen.

Aus einem später einzusehenden Grunde hat man diejenige Masse als Einheit angenommen, welche ein Gewicht

$$g = 9{,}80896 \text{ Kilogramm}$$

hat. Setzen wir daher $m_1 = 1$, so haben wir fortan als einfache Beziehung zwischen Masse und Gewicht aus (1)

*) Die Konstante q bedeutet die Größe der Anziehung zweier der Einheit gleichen Massen in einer Entfernung gleich der Längeneinheit.

**) Mit derselben Intensität wird auch die Erde vom Körper angezogen. Die Bestätigung dieses von Newton entdeckten Gesetzes erwarten wir von der Dynamik.

$$(2)\ G = mg; \text{ oder } m = \frac{G}{g}, \text{ d. h.}$$

man erhält die Masse eines Körpers, wenn man sein Gewicht durch die konstante Zahl 9,80896 dividiert.

§ 58. **Bestimmung des Schwerpunktes.** Vor allem setzen wir die betrachteten Körper als starre Verbindungen materieller Punkte voraus, ferner als homogen d. h. als solche, deren Masse über das Volumen gleichmäßig verteilt ist. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für einzelne Körper der Schwerpunkt von selbst, wie z. B. für die Gerade, den Kreis, das Parallelogramm, die Kugel, den Cylinder, das Parallelepiped und für die regulären Polyeder, bei welchen Körpern der Schwerpunkt jedesmal mit dem geometrischen Mittelpunkte zusammenfällt. Denn jede durch diesen Punkt gezogene Gerade wird geometrisch halbiert, so daß nach dem Begriffe der statischen Momente die Massenteilchen der einen Hälfte in jeder Lage denen der andern notwendig das Gleichgewicht halten.

§ 59. **Allgemeine Regeln zur Bestimmung des Schwerpunktes.**

1) Da bei homogenen Körpern gleiche Volumen auch gleiche Massen enthalten, so werden gleiche Volumen desselben Körpers von der Erde gleich stark angezogen und haben daher auch gleiches Gewicht. Kann man also einen homogenen Körper geometrisch halbieren und die Schwerpunkte A und B der beiden Hälften bestimmen, so liegt der Schwerpunkt des ganzen Körpers notwendig in der Mitte von AB.

2) Kann man einen Körper so halbieren, daß die Massenteilchen der einen Hälfte symmetrisch gegen die der andern Hälfte liegen, so liegt der Schwerpunkt in der halbierenden Ebene. Läßt sich dieses mehrmals ausführen, so liegt der Schwerpunkt im Schnittpunkt der den Körper halbierenden Ebenen.

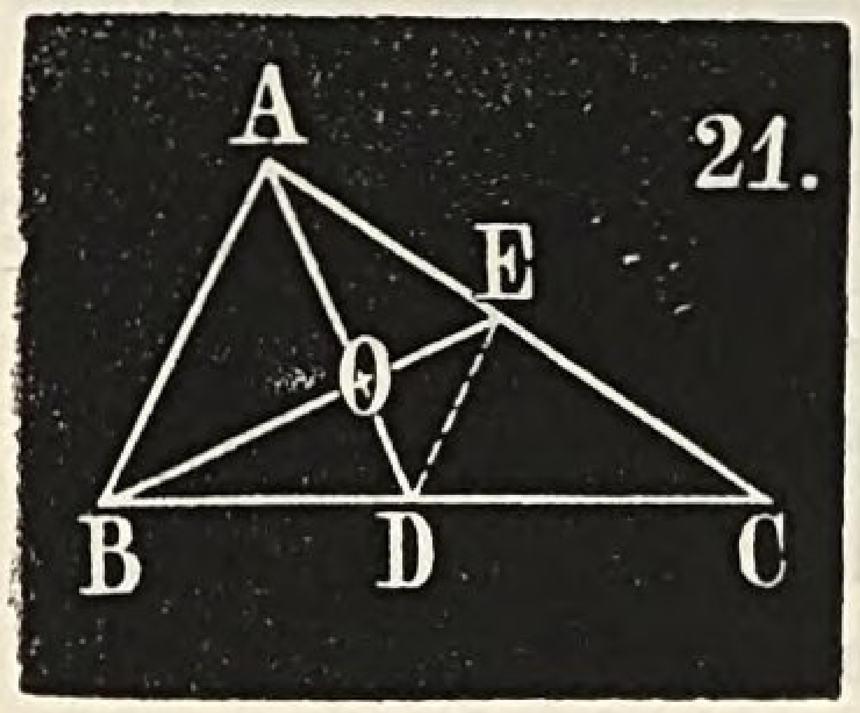
3) Zerlegt man den Körper in zwei ungleiche Teile vom Gewichte P und Q und sind beziehungsweise A und B ihre Schwerpunkte, so liegt der Schwerpunkt des Körpers auf der

Geraden AB in einem Punkte C, welcher durch die Gleichung

$$AC \cdot P = BC \cdot Q \text{ (§ 31)}$$

bestimmt ist.

§ 60. **Schwerpunkt eines Dreieckes***) Zieht man von der Spitze A eines Dreieckes (Fig. 21) nach der Mitte D der Basis BC eine Gerade, so liegt der Schwerpunkt O auf AD in einer Entfernung von der Spitze $AO = \frac{2}{3}$ AD.



21.

Beweis. Jede zu BC parallele Gerade wird durch AD halbiert; folglich hat jede solche Gerade ihren Schwerpunkt auf AD, somit liegt der Schwerpunkt des Dreieckes selbst auf AD. Aus demselben Grunde muß der Schwerpunkt des Dreieckes auch auf der Geraden BE, welche AC halbiert, liegen. Da nun der Schwerpunkt auf zwei verschiedenen Geraden zugleich liegt, so kann es nur ihr Schnittpunkt O sein.

Ziehen wir ED, so ist ED ‖ AB und △ ODE ∼ △ AOB; mithin

$$AO : OD = AB : DE$$
$$AB : DE = BC : CD = 2 : 1.$$

$$AO : OD = 2 : 1, \text{ oder folglich}$$
$$AO : AD = 2 : 3;$$
$$AO = \tfrac{2}{3} AD.$$

Zusatz 1. Ist h die Höhe des Dreieckes, so ist $\frac{1}{3}$ h die Entfernung des Schwerpunktes von der Basis.

§ 61. **Schwerpunkt des Viereckes.** Man zerlegt das Viereck ABCD durch die Diagonale AC in zwei Dreiecke und

*) Damit der Ausdruck für die Fläche einer Figur zugleich zum Ausdrucke für das Gewicht wird, kann man sich jede Flächeneinheit mit einer Gewichtseinheit Masse belegt denken. Die folgenden Resultate sind auf ebene, steife Platten von Metall oder Holz mit großer Annäherung anwendbar und können an solchen Platten experimentell nachgewiesen werden.

bestimmt die Schwerpunkte S_1, S_2 derselben nach § 60. Der Schwerpunkt des Viereckes liegt dann auf der Geraden $S_1 S_2$. Hierauf zieht man die Diagonale BD und bestimmt die Schwerpunkte S_3, S_4 der Dreiecke BDA und BDC. Der Schwerpunkt des Viereckes liegt dann auch auf der Geraden $S_3 S_4$. Somit liegt er im Schnittpunkte der Geraden $S_1 S_2$ und $S_3 S_4$.

Anmerkung. Man kann auch nach Auffindung der Schwerpunkte S_1, S_2 die Gerade $S_1 S_2$ im umgekehrten Verhältnisse der Höhen beider Dreiecke teilen, indem man diese Höhen, welchen die Flächen der Dreiecke proportional sind, wie die Kräfte in § 31 Zus. aufträgt.

§ 62. **Schwerpunkt eines Trapezes. Übungssatz.**

Verbindet man die Mittelpunkte E und F der parallelen Seiten AD = b und BC = a eines Trapezes durch eine Gerade, so liegt der Schwerpunkt O auf EF in einer Entfernung von b und a, welche beziehungsweise durch

$$x = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b}, \text{ und } x_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}$$

ausgedrückt ist, wenn h die Höhe des Trapezes bezeichnet.

§ 63. **Schwerpunkt eines Polygons.** Man zerlegt das Polygon in Dreiecke, bestimmt den Schwerpunkt eines jeden dieser Dreiecke und bringt in den Schwerpunkten parallele Kräfte an, welche den Flächen der bez. Dreiecke proportional sind. Zu diesen Kräften sucht man den Mittelpunkt nach dem in § 40 gegebenen Verfahren.

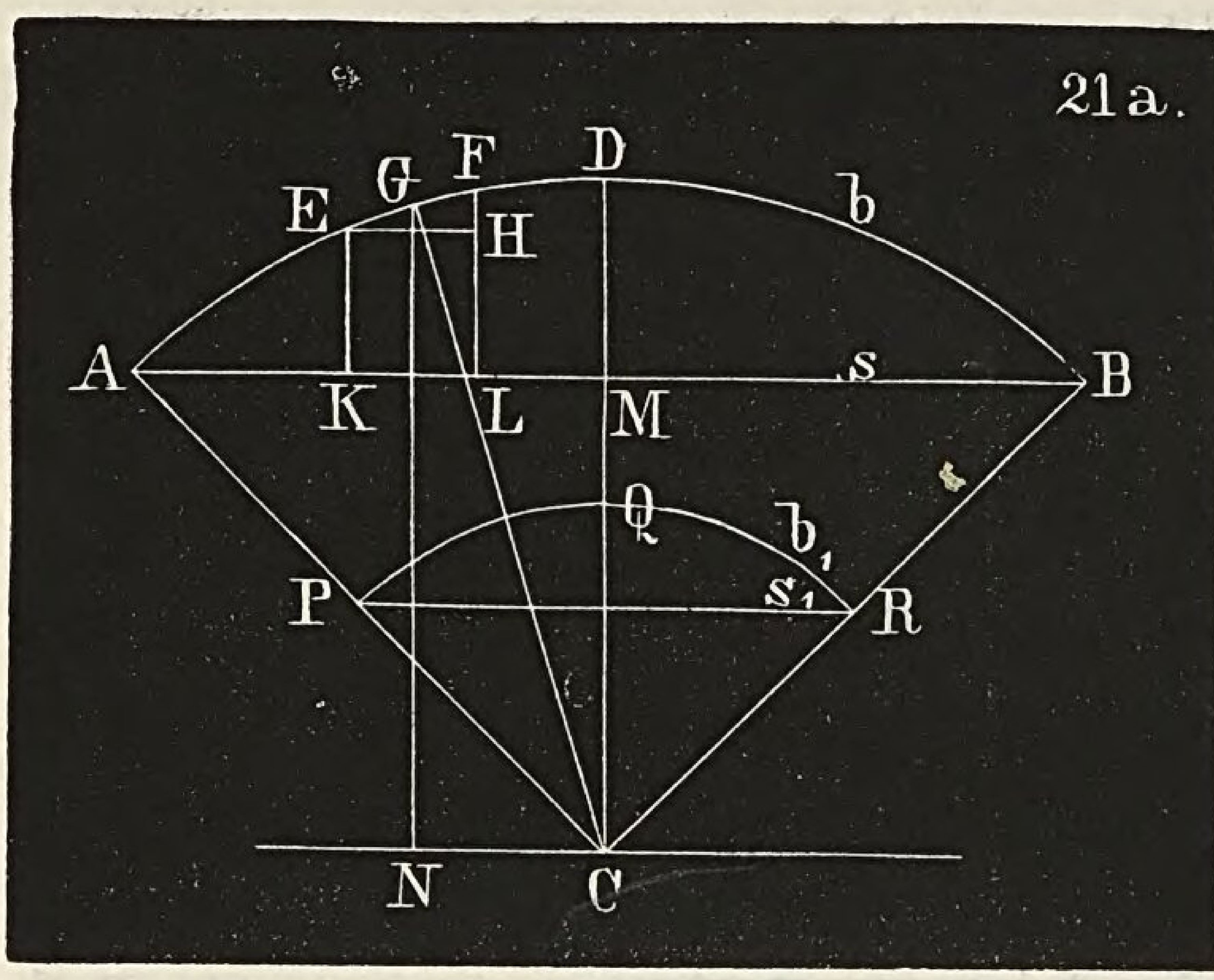
Ist das Polygon durch die rechtwinkligen Koordinaten seiner Eckpunkte gegeben, so kann eine Zerlegung desselben in Rechtecke und rechtwinklige Dreiecke vorteilhafter sein.

Der Schwerpunkt des Umfangs eines Polygons wird dadurch erhalten, daß man in den Mittelpunkten der einzelnen Seiten parallele Kräfte anbringt, welche den Seiten proportional sind, und den Mittelpunkt dieser Kräfte nach § 40 bestimmt.

§ 64. **Schwerpunkt des Umfanges eines Dreieckes.** Übungssatz. Sind h_2, h_1, h die Höhen eines Dreieckes, so hat der Schwerpunkt des Umfanges desselben beziehungsweise eine Entfernung von den Seiten c, b, a

$$z = \frac{h_2}{2} \cdot \frac{a + b}{a + b + c}; \; y = \frac{h_1}{2} \cdot \frac{a + c}{a + b + c}; \; x = \frac{h}{2} \cdot \frac{b + c}{a + b + c}.$$

§ 65. **Schwerpunkt eines Kreisbogens.**



Der Schwerpunkt O eines Kreisbogens AB = b (Fig. 21a) liegt auf dem Radius CD = r, welcher den Bogen und die Sehne AB = s halbiert, und hat vom Kreismittelpunkt eine Entfernung

$$x = \frac{r \cdot s}{b}.$$

B e w e i s. O liegt auf CD, weil AB von CD symmetrisch halbiert wird. Wir teilen den Bogen AB in 2 n gleiche Teile, verbinden die Teilpunkte wie E, F durch Sehnen und denken uns in den einzelnen Mittelpunkten (G) dieser Sehnen gleiche parallele Kräfte von der Größe p thätig, deren Richtung wir uns senkrecht zur Achse CD vorstellen. Dann schneidet die Resultante R′ dieser 2 n Parallelkräfte die CD im Schwerpunkte des Sehnenpolygons.

Die Lage der Resultante R′ ist bestimmt durch die Gleichung der auf den Punkt C bezogenen statischen Momente.

Das statische Moment der Kraft p in G ist $p \cdot \overline{GN}$, wobei p dem Gewichte der Sehne EF proportional ist und somit gleich $q \cdot \overline{EF}$ gesetzt werden kann, wenn q das Gewicht der Längeneinheit bezeichnet.

Man hat demnach

$$R' x' = \Sigma (q \cdot \overline{EF} \cdot \overline{GN}).$$

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke EFH und CGN ist aber

$$\overline{EF} : \overline{EH} = \overline{CG} : \overline{GN}$$

und somit $\overline{EF} \cdot \overline{GN} = \overline{CG} \cdot \overline{EH}$.

Substituiert man dieses in die obige Summe, so kann man das allen Gliedern gemeinsame $q \cdot \overline{CG}$ heraussetzen und erhält

$$R' x' = q \cdot \overline{CG} \, \Sigma (\overline{EH}).$$

Die Summe der $\overline{EH}$ ist aber nichts anderes als die Sehne $AB = s$, so daß

$$R' x' = q s \overline{CG}.$$

Ferner ist $R' = q \, \Sigma (\overline{EF})$, und folglich

$$x' = \frac{\overline{CG} \cdot s}{\Sigma (\overline{EF})}.$$

Läßt man nun die Anzahl (n) der eingeschriebenen Sehnen unendlich wachsen, so nimmt die Größe der einzelnen bis Null ab und die Summe $\Sigma (\overline{EF})$ erreicht wachsend den Bogen $AB = b$, während gleichzeitig $\overline{CG}$ dem Radius r gleich und x' zur Abscisse (x) des Schwerpunkts des Bogens wird. Somit ist, wie oben behauptet,

$$x = \frac{r s}{b}.$$

Zusatz. Für einen Halbkreis ist $b = r\pi$ und $s = 2r$, folglich

$$x = \frac{2r}{\pi}.$$

§ 66. **Lehrsatz.** Der Schwerpunkt O eines **Kreisausschnitts** liegt (Fig. 21a) auf dem halbierenden Radius CD und hat vom Mittelpunkt eine Entfernung

$$x = \tfrac{2}{3} \frac{r \cdot s}{b}.$$

Beweis. Zerlegen wir den Kreisausschnitt in eine sehr große Anzahl (n) unter sich gleicher Sektoren, so kann jeder als Dreieck von sehr kleiner Grundlinie betrachtet werden, dessen Mittellinie dem Radius gleich ist. Somit liegt der Schwerpunkt eines solchen Dreiecks um $\tfrac{2}{3}$ r vom Mittelpunkt entfernt. Man kann sich somit die Angriffspunkte der an dem Sektor

thätigen Schwerkräfte auf einem Bogen b' denken, der mit dem Radius $= \frac{2}{3}r$ beschrieben ist. Bezeichnen wir die dazu gehörige Sehne mit s', so hat der Mittelpunkt dieser Schwerkräfte vom Mittelpunkte des Kreises die Entfernung (§ 66)

$$x = \frac{2}{3}\frac{r \cdot s'}{b'}.$$

Nun ist aber s' : b' = s : b; folglich

$$x = \frac{2}{3}\frac{r \cdot s}{b}.$$

Zusatz. Für einen Halbkreis ist $b = r\pi$, $s = 2r$, mithin $x = \frac{4r}{3\pi}$; für einen Viertelkreis ist analog $x = \frac{4r}{3\pi}\sqrt{2}$.

§ 67. **Schwerpunkt des Segments.** Bezeichnen wir die Schwerpunkte des Sektors mit O, des Segments mit O_1, des Dreieckes (Fig. 21 a) mit O_2, so kann das Gewicht des Sektors als Resultante der beiden anderen Gewichte angesehen werden, und die Gleichung der statischen Momente in bezug auf den Mittelpunkt C ist nach § 34

$$OC \cdot \text{Sector} = O_1C \cdot \text{Segment} + O_2C \cdot \triangle, \text{ oder}$$

$$\frac{2}{3}\frac{r \cdot s}{b} \cdot \frac{br}{2} = x\left(\frac{br}{2} - \frac{sh}{2}\right) + \frac{2}{3}h \cdot \frac{sh}{2}; \text{ hieraus}$$

$$x = \frac{s^3}{6(br - sh)},$$

worin b den Bogen, s die Sehne und h die Höhe CM des Dreieckes bezeichnet. Letztere kann leicht durch den Radius r und die Höhe des Segments ausgedrückt werden.

§ 68. **Schwerpunkt eines Kreisringes.** (Fig. 21 a). Sind O, O_1 die Schwerpunkte der Sektoren ABC und PCR, O_2 der Schwerpunkt des Kreisringes APRB, so ist (§ 34)

$$OC \cdot \text{Sector } ACB = O_1C \cdot \text{Sector } PCR + O_2C \cdot \text{Ring}, \text{ oder}$$

$$\frac{2}{3}\frac{rs}{b} \cdot \frac{br}{2} = \frac{2}{3}\frac{r_1 s_1}{b_1} \cdot \frac{b_1 r_1}{2} + x\left(\frac{br}{2} - \frac{b_1 r_1}{2}\right).$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung $r : s : b = r_1 : s_1 : b_1$ ergibt sich hieraus

$$x = \frac{2s}{3b} \cdot \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}.$$

§ 69. **Der Schwerpunkt des Mantels eines senkrechten Kegels** liegt auf der Achse des Kegels in einer Entfernung von der Spitze $x = \frac{2}{3} h$.

Zusatz. Der Schwerpunkt des Mantels eines abgekürzten Kegels, dessen Radien R und r sind, liegt in der Achse und ist vom Grundkreise entfernt um

$$x = \frac{h}{3} \cdot \frac{2r + R}{r + R}.$$

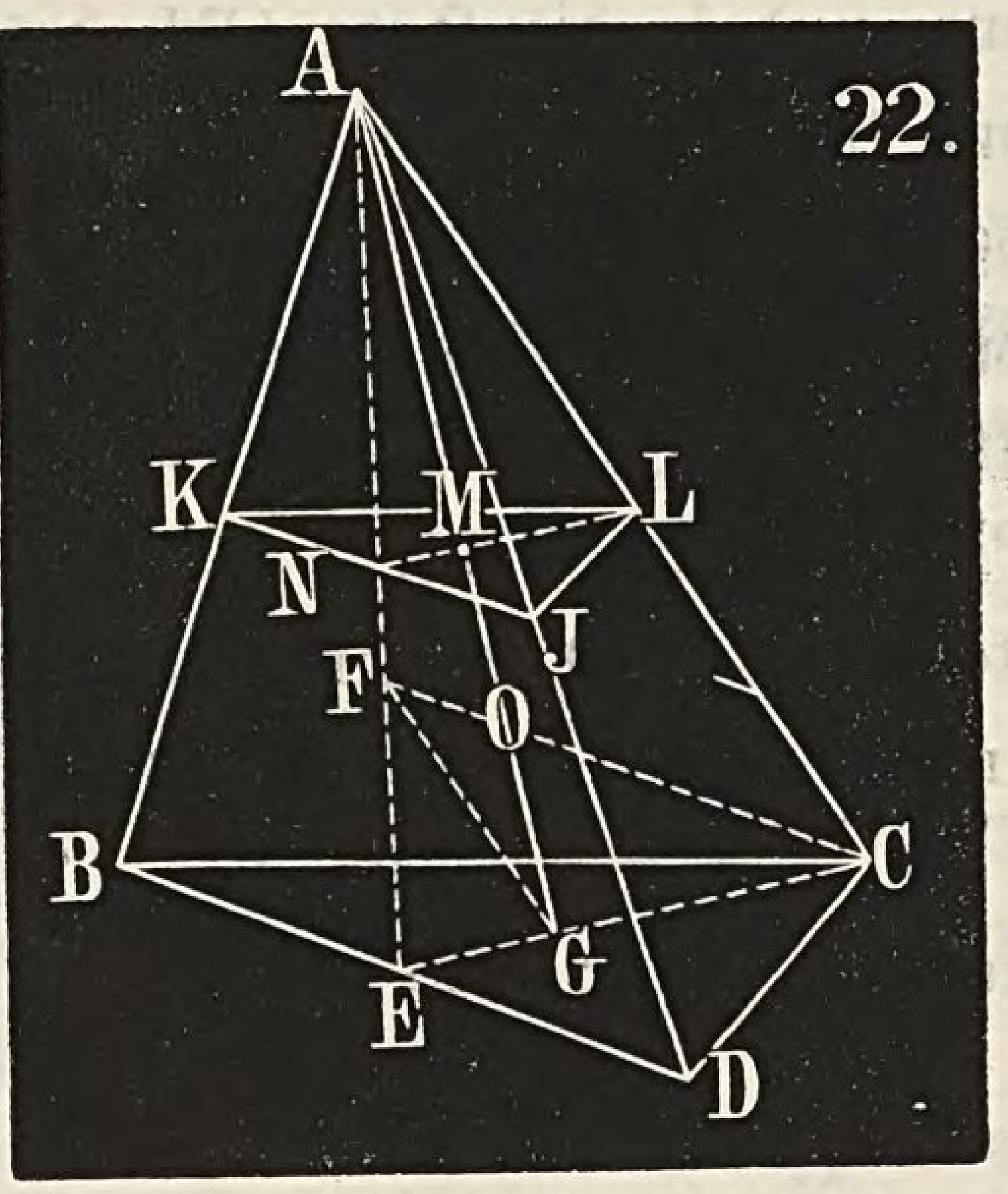
§ 70. **Der Schwerpunkt einer Kugelzone** oder **Kugelhaube** liegt in der Mitte der durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Höhe.

Beweis. Teilen wir die Höhe der Zone in sehr viele (n) gleiche Teile und legen senkrechte Ebenen durch die Teilpunkte, so entstehen n Ringe von gleichem Flächeninhalte, deren Schwerpunkte in gleichen Abständen auf der Höhe der Zone liegen. Der Mittelpunkt der in diesen Schwerpunkten angreifenden Parallelkräfte liegt somit in der Mitte der Höhe.

§ 71. **Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide.** Der Schwerpunkt O einer dreiseitigen Pyramide liegt auf einer Geraden AG, welche die Spitze mit dem Schwerpunkte G der Basis verbindet, in einer Entfernung von der Spitze

$$AO = \frac{3}{4} AG.$$

Beweis. Sei (Fig. 22) G der Schwerpunkt der Basis. Legen wir eine Ebene KLJ ‖ zur Basis und ziehen LN, so ist △ KLJ ∼ △ BCD und hat seinen Schwerpunkt M auf der Geraden AG. Denn erstlich ist KN = JN wegen BE = ED, ferner ist aus der Ähnlichkeit der Dreiecke LM : LN = CG : CE; mithin $LM = \frac{2}{3} LN$ und M der Schwerpunkt des Dreieckes JKL. Aus demselben Grunde hat jeder andere parallele Schnitt seinen Schwerpunkt auf AG.



Ist ferner F der Schwerpunkt des Dreieckes ABD und wir ziehen CF, so liegt der Schwerpunkt der Pyramide aus demselben Grunde auch auf CF, beide Gerade liegen in der Ebene AEC und schneiden sich als Ecken-Transversale des $\triangle$ AEC; folglich ist ihr Schnittpunkt O der Schwerpunkt der Pyramide. Ziehen wir noch FG, so ist FG ǂǂ AC, und wir haben

$$\begin{aligned} AO : GO &= AC : FG \\ AC : FG &= CE : GE \\ CE : GE &= 3 : 1; \text{ mithin} \\ \hline AO : GO &= 3 : 1, \text{ oder} \\ AO : AG &= 3 : 4, \text{ oder} \\ AO &= \tfrac{3}{4} AG. \end{aligned}$$

Zusatz 1. Vorstehender Lehrsatz gilt wörtlich für eine n seitige Pyramide, wenn G der Schwerpunkt der Basis ist. Denn zerlegt man die n seitige Pyramide in dreiseitige, so hat jede dieser Pyramiden ihren Schwerpunkt in einer Ebene, welche durch O parallel zur Basis gelegt wird unter der Voraussetzung, daß AO $= \frac{3}{4}$ AG ist. Die Schnittfigur hat aber ihren Schwerpunkt auf AG aus demselben Grunde, aus welchem das $\triangle$ JKL seinen Schwerpunkt M auf AG hat; mithin ist O der Schwerpunkt für die ganze Pyramide.

Zusatz 2. Sind y_1, y_2, y_3, y_4 die Entfernungen der vier Ecken einer dreiseitigen Pyramide von einer Ebene, so erhalten wir für die Entfernung y des Schwerpunktes O von derselben Ebene:

$$y = \tfrac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4).$$

§ 72. **Schwerpunkt einer abgestumpften Pyramide.** Sind M und G (Fig. 22) die Schwerpunkte der parallelen Flächen einer abgestumpften Pyramide, so liegt ihr Schwerpunkt auf MG = h in einer Entfernung von der Basis G

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{G + 2\sqrt{Gg} + 3g}{G + \sqrt{Gg} + g},$$

wenn G und g den Inhalt der Grundflächen bezeichnen.

Beweis. Denkt man sich den Pyramidenstumpf zur ganzen Pyramide ergänzt, deren Schwerlinie H sein mag, so hat man in Bezug auf den Schwerpunkt der Basis G die Gleichung der statischen Momente:

$$\text{Pyr.}\ \tfrac{1}{4}\,H = \text{pyr.}\ [h + \tfrac{1}{4}(H - h)] + \text{Stumpf} \cdot x$$

oder

$$\tfrac{1}{3}GH' \cdot \tfrac{1}{4}H = \tfrac{1}{3}g(H'-h')[h+\tfrac{1}{4}(H-h)] + \tfrac{1}{3}h'(G+g+\sqrt{Gg}) \cdot x,$$

wenn mit H′ und h′ die den Schwerlinien H und h entsprechenden Höhen bezeichnet werden. Da aber $H' = H \cos\gamma$, $h' = h \cos\gamma$, wenn γ der Winkel ist, welchen die Geraden H und H′ mit einander bilden, so folgt:

$$\tfrac{1}{4}\,GH^2 = g(H-h)[h + \tfrac{1}{4}(H - h)] + h(G + g + \sqrt{Gg}) \cdot x.$$

Aus dieser Gleichung ist noch H mittelst der Beziehung

$$\left(\frac{H-h}{H}\right)^2 = \frac{g}{G}$$

zu eliminieren, worauf sich für x der obige Wert als einfachster Ausdruck ergibt.

§ 73. Der **Schwerpunkt eines Kegels** liegt auf seiner Achse in einer Entfernung von der Spitze $AO = \frac{3}{4}\,h$. Der Schwerpunkt eines Kegelstumpfes liegt gleichfalls auf der Achse in einer Entfernung vom Kreise R

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

§ 74. Der **Schwerpunkt eines Prismas** liegt in der Mitte der Schwerlinie d. h. der Geraden, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindet.

§ 75. **Schwerpunkt eines Kugelsektors.** Denken wir uns den Sektor in eine sehr große Anzahl (n) unter sich gleicher Pyramiden zerlegt, deren jede ein kleines Stück der Kugeloberfläche zur Basis und den Radius zur Höhe hat, so hat jede Pyramide ihren Schwerpunkt auf ihrer Höhe $\frac{3}{4}$ r vom Centrum

entfernt. Die Angriffspunkte der n gleichen Schwerkräfte kann man sich demnach auf einer Kugelhaube vom Radius $= \frac{3}{4}r$ denken, und sie haben ihren Mittelpunkt in der Mitte der Höhe. Ist h die Höhe der zum Sektor gehörigen Haube, so ist $\frac{3}{4}h$ die Höhe derjenigen Haube, auf welcher die Schwerpunkte liegen. Der Schwerpunkt des Sektors hat demnach eine Entfernung vom Mittelpunkt

$$x = \frac{3}{4}r - \frac{3}{8}h = \frac{3}{8}(2r - h).$$

§ 76. Zusatz. Für eine Halbkugel ist $h = r$; mithin

$$x = \frac{3}{8}r.$$

§ 77. **Schwerpunkt eines Kugelsegments.** Zerlegen wir den Sektor in ein Segment, dessen Höhe $= h$, und in einen Kegel, dessen Höhe $= r - h$ ist, so haben wir zwischen ihren statischen Momenten in Beziehung auf den Mittelpunkt der Kugel die Gleichung:

$$\frac{3}{8}(2r - h) \cdot \text{Sector} \cdot = \frac{3}{4}(r - h)\,\text{Keg} \cdot + x \cdot \text{Segm} \cdot .$$

Nun ist aber

$$\text{Sect} \cdot = \frac{2}{3}r^2\pi h\,;\ \text{Keg} \cdot = \frac{r\text{-}h}{3}(2\,rh\text{-}h^2)\pi;\quad \text{Segm} = \frac{1}{3}h^2\pi\,(3r\text{-}h).$$

Vermöge dieser Werte erhalten wir nach geschehener Reduktion für die Entfernung des Schwerpunktes des Segments vom Mittelpunkt

$$x = \frac{3}{4}\,\frac{(2r-h)^2}{3r-h}.$$

Sechstes Kapitel.

Gleichgewicht an Maschinen.

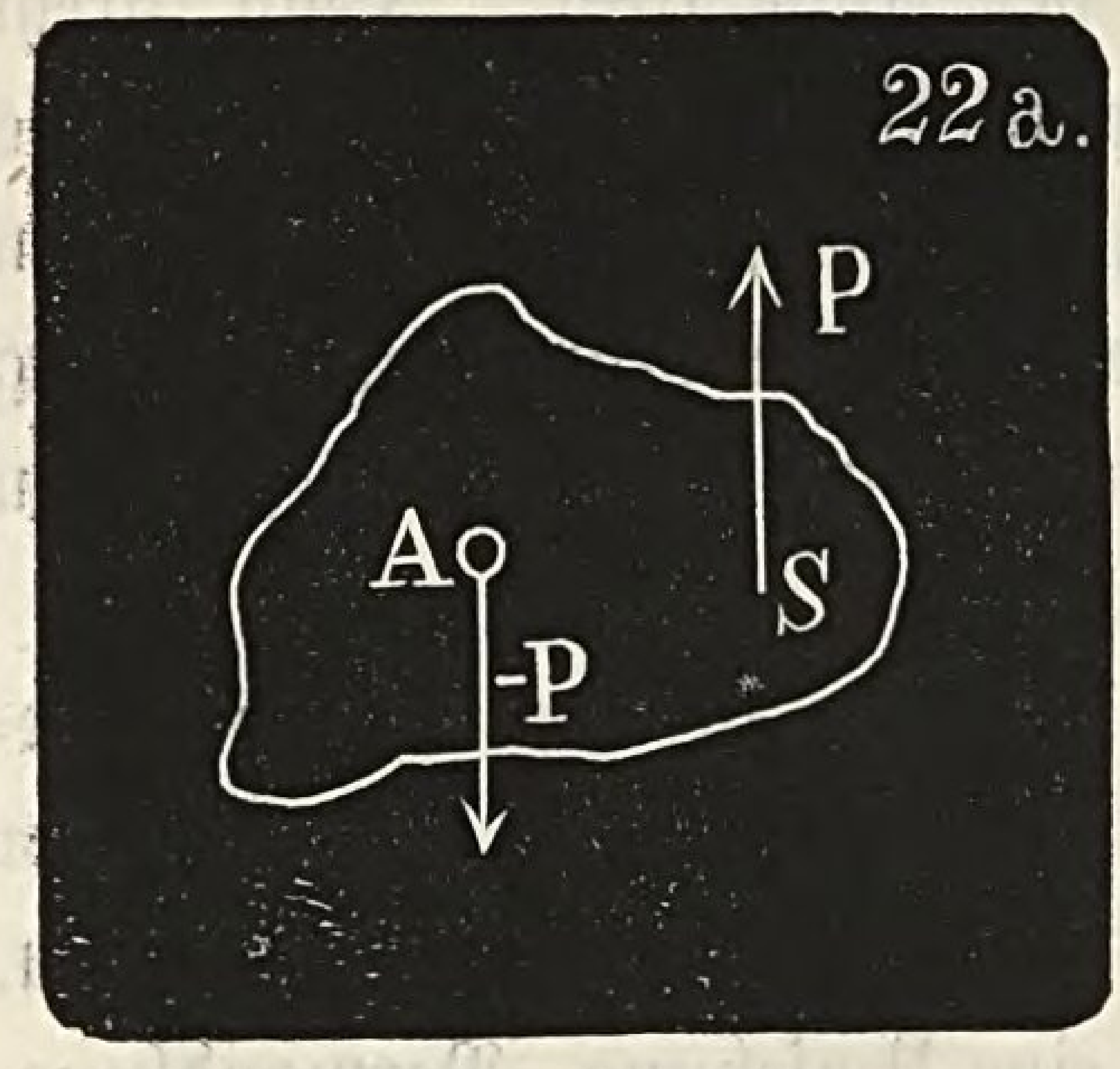
§ 78. Unter einer **festen Achse** soll ein cylindrischer Stab verstanden werden, welcher mit dem Erdkörper unverrückbar verbunden ist, wie dieses annähernd durch Einmauern und dgl. erreicht werden kann. Der cylindrische Stab selbst soll als Körper von solcher Festigkeit gedacht werden, daß er jeder

äußeren Kraft, die ihn angreift, ohne merkliche eigene Deformation eine elastische Kraft von gleicher Größe entgegenzusetzen vermag.

Auf eine solche feste Achse (Fig. 22a) denken wir uns einen anderen festen Körper K, der als starre Verbindung materieller Punkte vorausgesetzt werden soll, so aufgesteckt, daß er die Achse mittelst einer cylindrischen Höhlung, die er besitzt, vollständig umschließt (etwa so wie ein Wagenrad auf die Wagenachse aufgesteckt ist). Greift eine Kraft P, deren Richtung in einer zur Achse senkrechten Ebene liegt, an irgend einem Punkte S des Körpers K an, so würde diese Kraft, wenn der Körper K frei wäre, zunächst dem materiellen Punkte S und vermöge der bestehenden starren Verbindung auch den übrigen Molekülen des Körpers K eine Geschwindigkeit in ihrer Richtung mitteilen. Diese fortschreitende Geschwindigkeit kann aber nicht zustande kommen, da einigen der Moleküle des Körpers K die feste Achse im Wege steht. Der Widerstand der Achse äußert sich als eine Kraft (Gegendruck), welche der angreifenden Kraft P gleich und entgegengesetzt ist und im Punkte A auf den Körper K übertragen wird.

An dem Körper K wirkten somit zwei gleiche, parallele, entgegengesetzte Kräfte, d. h. ein Kräftepaar (+ P, — P), welches den Körper K um die Achse dreht. Außerdem greift jene Kraft (+ P), welche der P gleich, parallel und gleich gerichtet ist, und, als Druck auf die Achse den Gegendruck (— P) zu A hervorgerufen hat, an der Achse an und muß von den elastischen Kräften der Achse selbst, der Mauerung . . . . im Gleichgewicht gehalten werden.

Es sind somit teils vermöge des festen Zusammenhanges, teils vermöge der Berührung in A infolge des Angriffes der Kraft P noch drei weitere Kräfte von gleicher Größe in Thätigkeit getreten, und diese Zahl könnte sogar beliebig gesteigert werden, wenn man den Vorgang der Kraftübertragung durch die Molekularschichten hindurch verfolgen wollte.



Von allen diesen Kräften ist nur eine (P) eine äußere, die übrigen sind innere, durch molekulare Verschiebungen hervorgerufene elastische Kräfte. Diese molekularen Verschiebungen beginnen im Angriffspunkte der äußeren Kraft P und setzen sich von Molekül zu Molekül durch den Körper und die Achse fort.

Anmerkung. Anstatt den Körper K auf die feste Achse drehbar aufzustecken, kann man auch die Achse mit dem Körper K fest verbinden und mit ihren Enden (Zapfen) in cylindrische Höhlungen eines anderen festen Körpers, d. h. in Lager legen, welche durch den Lagerstuhl mit dem Erdkörper fest verbunden sind.

§ 79. **Verschiedene Arten des Gleichgewichts.** Wirkt an dem Körper K nur die eigene Schwere, so wird das Moment des Kräftepaares dann Null, wenn der Schwerpunkt in der Vertikalen liegt, welche durch die geometrische Achse geht. Der Körper ist dann im Gleichgewicht. Man unterscheidet indessen drei Arten von Gleichgewicht, je nach dem Verhalten des Körpers gegenüber einer kleinen Störung, welche ihn aus der Gleichgewichtslage herausdreht. Kehrt er nach eingetretener Störung von selbst in die frühere Gleichgewichtslage zurück, so heißt diese stabil, bleibt er nach der Drehung in der neuen Lage, so also, daß auch diese eine Gleichgewichtslage ist, so heißt das Gleichgewicht indifferent, setzt aber der Körper eine in der Gleichgewichtslage begonnene Drehung von selbst weiter fort, dann heißt das Gleichgewicht, in welchem er sich befand, labil.

Man überzeugt sich leicht, daß das Gleichgewicht des Körpers K, an welchem nur die eigene Schwere wirkt, stabil ist, wenn sein Schwerpunkt unterhalb der Achse liegt, indifferent, wenn der Schwerpunkt in der Achse, und labil,

wenn der Schwerpunkt oberhalb der Achse liegt. Denn dreht man ihn aus der ersten Lage, so entsteht ein Kräftepaar, welches ihn nach der Gleichgewichtslage zurückdreht, während im dritten Falle ein Kräftepaar auftritt, welches die begonnene Drehung fortsetzt, und im zweiten Falle überhaupt kein Kräftepaar zu stande kommt.

§ 80. Einem Körper (K), welcher in der oben beschriebenen Weise auf eine feste Achse aufgesteckt oder mittelst einer Achse eingelagert ist, kommt die Bedeutung einer Maschine zu, insofern er benutzt werden kann, eine Umsetzung, Verwandlung, Abänderung von Kräften der Größe oder der Richtung nach zu vermitteln. Je nach der Form oder Verwendung erhält die Maschine verschiedene Namen, wie Hebel, Rad an der Welle, Rolle. Ferner gibt es Kombinationen dieser einfachen Maschinen zu verschiedenen Arten von Wagen, Winden, Aufzügen, Flaschenzügen.

§ 81. **Hebel.** Der um eine feste Achse oder in einem festen Lager drehbare, an fortschreitender Bewegung aber gehinderte Körper K heißt Hebel, wenn eine Ausdehnung — Länge — gegen die anderen überwiegt. Es ist üblich, die in Bezug auf Theorie und Praxis unwesentlichen Unterscheidungen zwischen zweiarmigen, einarmigen und Winkelhebeln zu machen, je nachdem die Drehungsachse zwischen den Angriffspunkten der Kräfte oder außerhalb dieser Angriffspunkte oder im Scheitel eines Winkels liegt, an dessen Schenkeln Kräfte angreifen.

Die Methode, mittelst welcher zugleich die Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden und der Druck auf die Achse der Größe und Richtung nach bestimmt wird, ist in allen Fällen die gleiche.

Man bringt zu jeder äußeren Kraft $+ P$, welche den Hebel angreift, zwei ihr gleiche und parallele einander entgegengesetzte Kräfte ($\pm P$) in der Achse an, von welchen die eine ($+ P$), den Druck vorstellt, welchen die Achse erleidet, und somit auch an dieser angreift, während die andere ($- P$) sich mit der gegebenen äußeren Kraft ($+ P$) zu einem Kräftepaare verbindet.

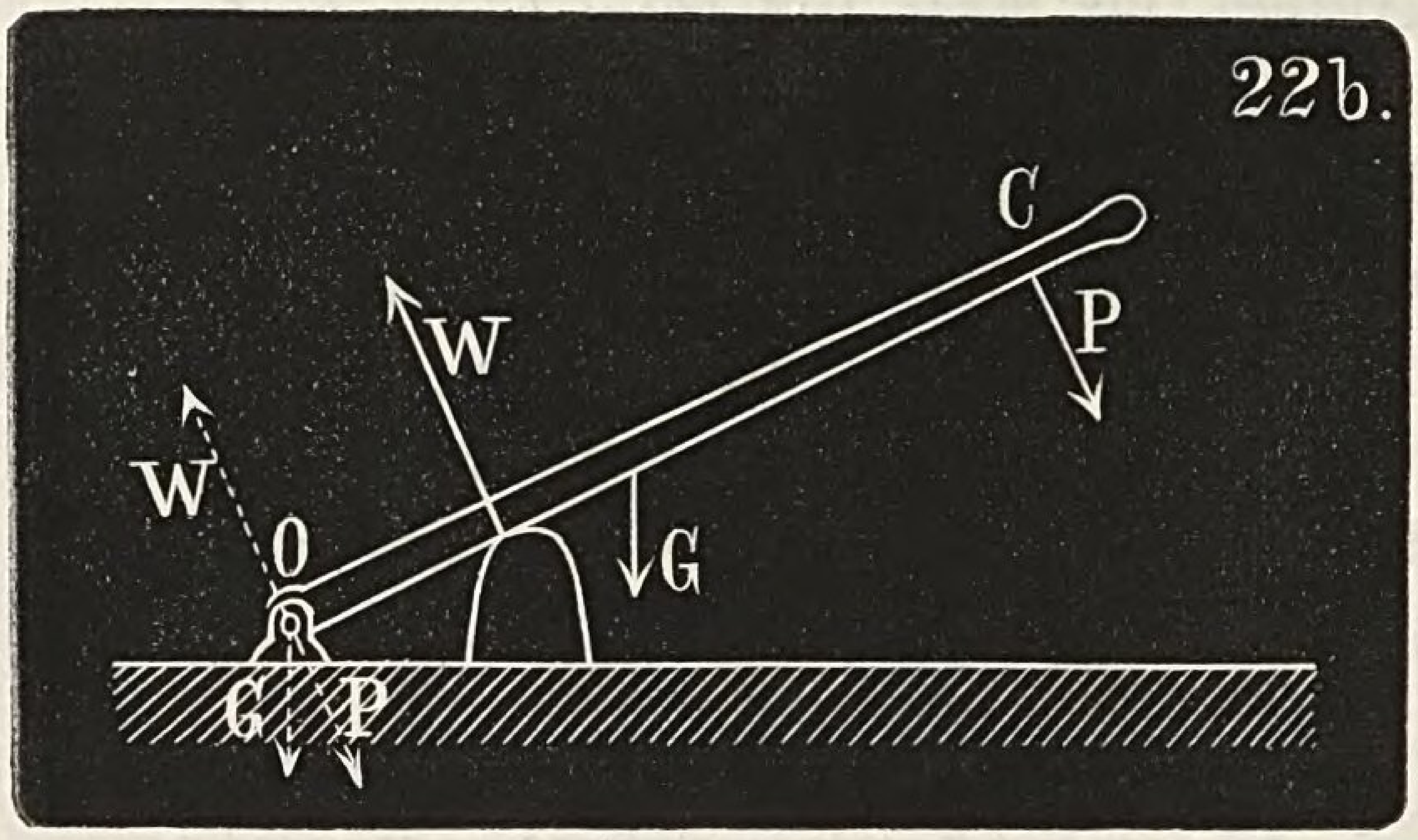
a) Der einfachste Fall ist dann der, daß alle Kräfte in einer und derselben zur Achse senkrechten Ebene wirken oder nach § 45 und § 46 in eine solche verlegt werden können. In diesem Falle ist das Moment des resultierenden Paares gleich der algebraischen Summe der einzelnen Momente, also die Gleichgewichtsbedingung einfach dadurch gegeben, daß diese algebraische Summe gleich Null ist. Der Druck auf die Achse erfolgt senkrecht zur Achse und wird der Größe und Richtung nach gemäß §§ 25—27 gefunden.

b) Liegt eine der Kräfte (P) nicht in einer zur Achse senkrechten Ebene, so kann man sie in zwei Kräfte (X und Q) zerlegen, von welchen die eine (X) der Drehungsachse parallel ist, während die andere (Q) in der Ebene (PX) auf X senkrecht steht und somit in einer zur Drehungs-Achse senkrechten Ebene liegt. Das Moment des der Komponente Q entsprechenden Paares tritt in die algebraische Summe der Momente ein, von welcher das Gleichgewicht abhängt, und Q selbst wirkt als senkrechter Druck gegen die Achse. — Die Komponente X liefert ebenfalls eine Kraft, welche den Körper K längs der Achse zu verschieben sucht. Stößt diese Bewegung auf Widerstand, so erleidet der widerstehende Körper einen Druck von der Größe X und übt einen Gegendruck (— X) in der Richtung der Achse, welcher mit der Komponente X verbunden ein Kräftepaar darstellt, das den Hebel in einer die Drehungsachse selbst enthaltenden Ebene zu drehen sucht. Diese Drehung wird durch die Einlagerung des Hebels und durch die feste Aufstellung der Achse oder des Lagers verhindert.

Sind also Kräfte vorhanden, welche nicht in Ebenen wirken, die senkrecht zur Drehungsachse liegen, so ergeben sich aus den der Achse parallelen Komponenten gewisse Konstruktionsbedingungen für den Hebel, welche erfüllt sein müssen, wenn der Hebel regelrecht funktionieren soll, d. h. wenn sich seine Moleküle nur in Kreisen bewegen sollen, welche auf der Achse senkrecht stehen.

Beispiel. Das Futterschneidmesser. Der um O dreh-

bare, zur Zeit um den Winkel ε über die Horizontale erhobene Hebel OC soll mit Hilfe der Kraft P einen Widerstand W überwinden. Wie groß muß P sein, wenn OC = l, OW = a, das Gewicht des Hebels G Kil. beträgt und sein Schwerpunkt um die Strecke b von O entfernt ist?



Die Gleichung des Gleichgewichts ist

$$Pl + Gb \cos \varepsilon - Wa = o.$$

Mittelst des hieraus berechneten Wertes von P kann eine drehende Bewegung, welche dem Hebel in der Richtung von P erteilt worden ist, gleichförmig fortgesetzt werden. Der Druck auf die Achse ist der Richtung und Größe nach durch die Diagonale des Parallelogramms der Kräfte (W — P) und G gegeben.

§ 82. Die **Wagen** dienen im allgemeinen dazu, die Gewichte verschiedener Körper mit einander zu vergleichen. Die Kräfte, welche an ihnen wirken, sind somit alle vertikal abwärts gerichtet und haben eine vertikal abwärts gerichtete Resultante. Deshalb ist es nicht nötig, daß die Wage nach allen Richtungen hin an fortschreitender Bewegung gehindert sei, es genügt vielmehr eine Unterstützung, welche diese Bewegung nach unten verhindert. So kommt es, daß die Achsen der Wagen häufig Kanten dreiseitiger Prismen (Schneiden) sind, welche in Kerben, cylindrisch ausgehöhlten Pfannen oder, bei den feinsten Wagen, nur auf ebenen Platten liegen.

§ 83. Die **Schnellwage.** Ein prismatischer Stab hat an dem einen Ende einen Haken zum Anhängen einer Wagschale, und nicht weit davon entfernt eine Achse (Schneide), welche

in einem Hängelager spielt. Das Lager wird entweder mit der Hand gehalten oder aufgehängt. Das Zünglein steht zwischen den Backen des Lagers nach oben. Von der Achse nach rechts erstreckt sich ein langes dreiseitiges oder vierseitiges Prisma, welches eine Kante nach oben kehrt und mit einer Teilung versehen ist. Längs dieser Teilung wird ein Laufgewicht verschoben, bis gegenüber der auf die Wagschale gelegten Last Gleichgewicht hergestellt ist, d. h. der Wagbalken horizontal oder das Zünglein vertikal einsteht.

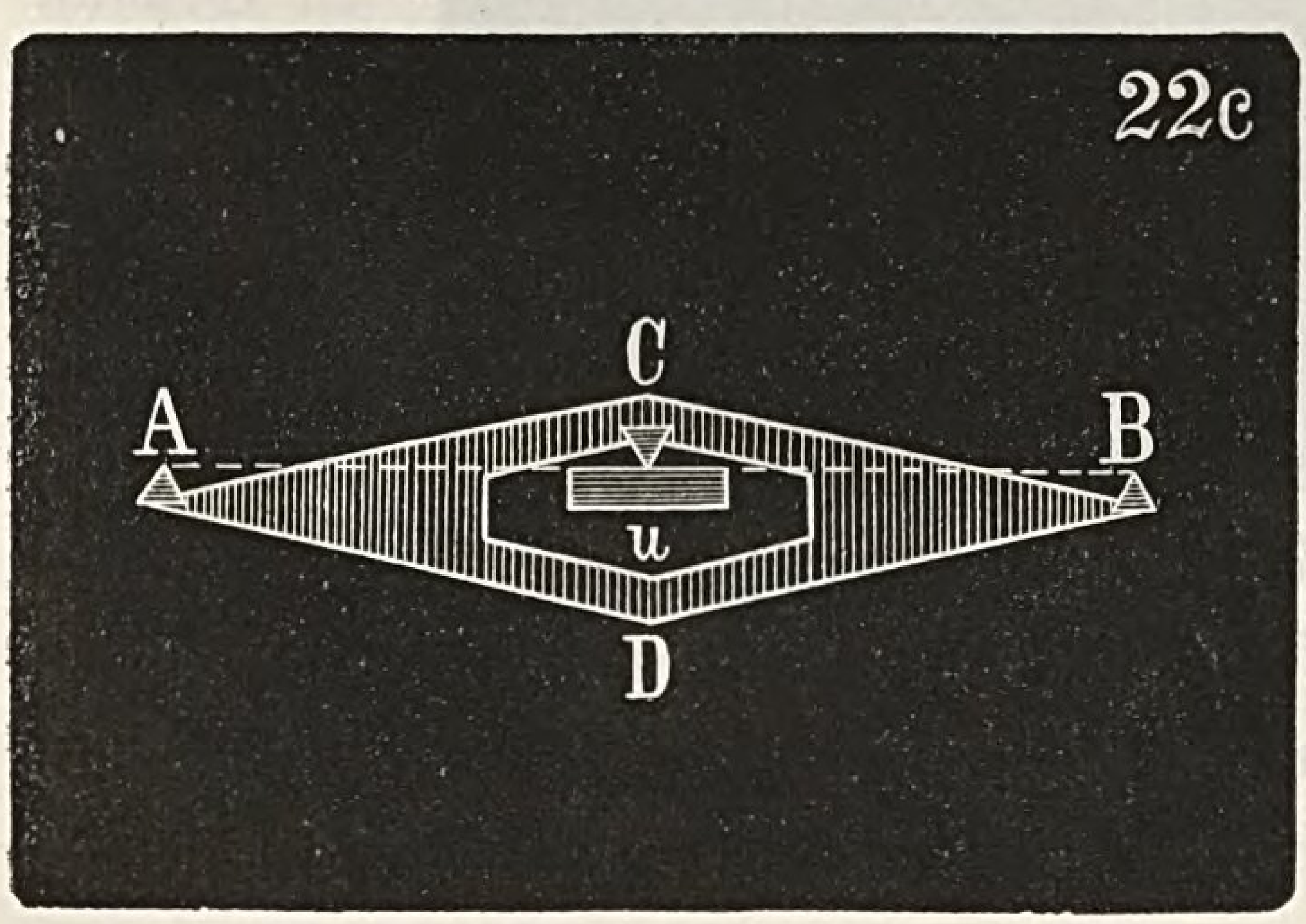
Ohne Laufgewicht und Belastung muß die Wage im Gleichgewicht sein. Soll die Teilung gleichmäßig sein, so hat sie in einer Entfernung von der Achse, welche dem Abstande des Aufhängepunktes der Wagschale von der Achse gleich ist, mit einer Marke zu beginnen, an welcher das Gewicht des Laufgewichtes selbst angeschrieben ist. In der doppelten Entfernung steht der zweifache Betrag des Laufgewichtes angeschrieben u. s. f. Zwischen diesen Haupt-Marken befinden sich je zehn gleiche Abteilungen, jede einem Zehntel des Laufgewichtes entsprechend.

Demnach ist es vorteilhaft, das Laufgewicht 1 ℔, 1 Kilogramm, oder bei größeren Wagen 10 ℔ schwer zu machen.

Ist a der Abstand des Aufhängepunktes der Wagschale von der Achse, L die aufgelegte Last, K das Laufgewicht, b sein Abstand von der Achse, so ist im Falle des Gleichgewichts

$$La = Kb,$$

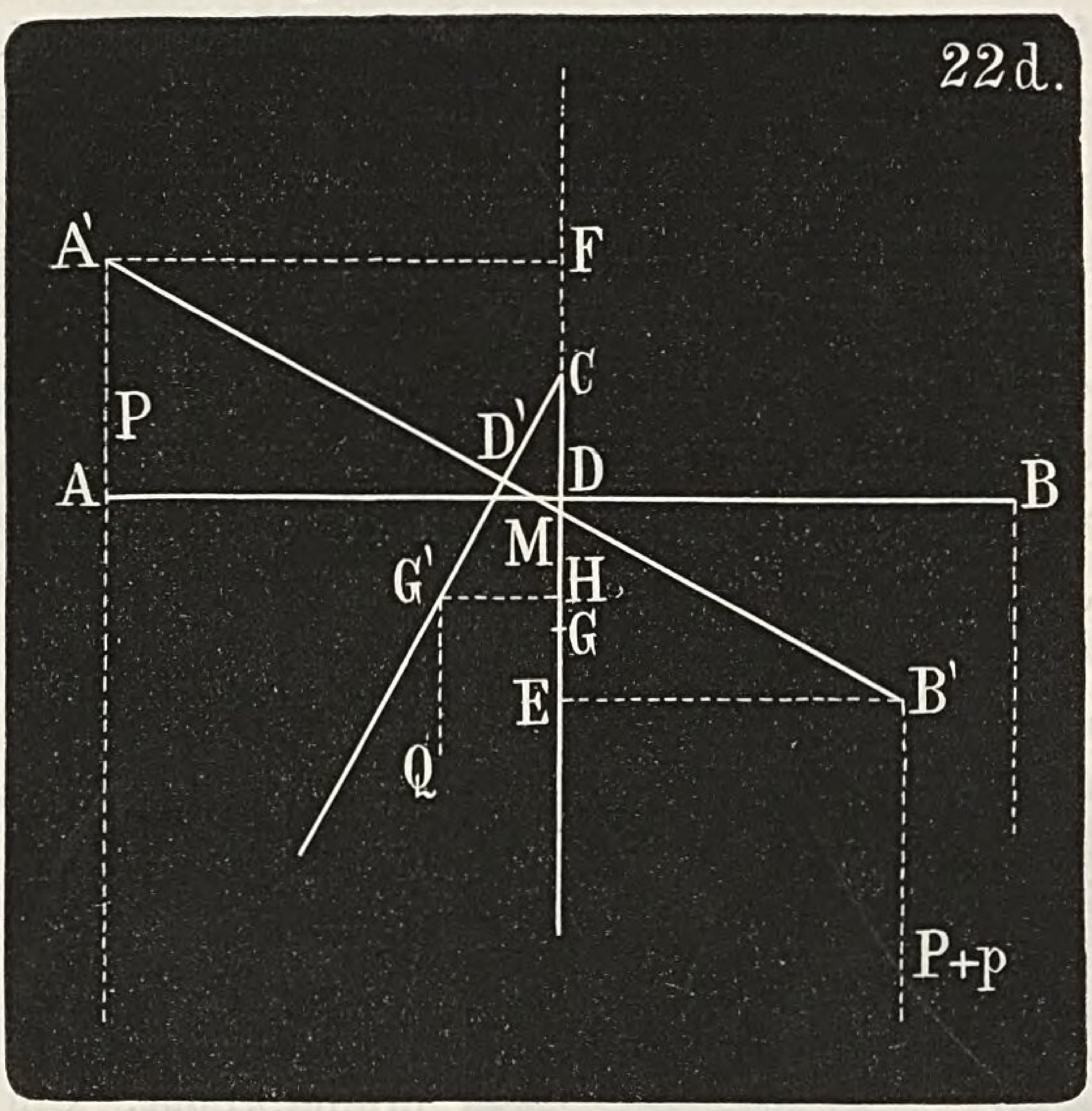
somit $L = \frac{b}{a} K$, woraus sich die oben beschriebene Einrichtung zur Ablesung des Gewichtes rechtfertigen läßt.



§ 84. Die **gleicharmige Wage.** Ein Vertikalschnitt durch den Wagbalken (Fig. 22 c) hat als Grundform ein Viereck

ACBD, auf welchem die Seitenkanten der drei dreiseitigen Prismen, die Schneiden A, B, C senkrecht stehen. Mittelst der Schneide bei C wird der Wagbalken auf die Unterstützung U aufgesetzt, welche durch einen Ausschnitt des Wagbalkens hereinragt. Auf die beiden Schneiden in A und B werden die Wagschalen gehängt. Die Schneiden sind von Stahl, die Unterstützung U von Achat.

Die drei Schneiden A, C, B sind parallel und liegen ungefähr in einer Ebene, so daß die Schnittlinie ACB nahezu eine Gerade ist. In der That läßt sich diese Lage aber nur für eine einzige Belastung der Wage herstellen, bei jeder andern Belastung liegt dann C außerhalb der Graden AB, bei kleinerer unterhalb, bei größerer oberhalb. Eine Theorie der Wage, welche einigermaßen der Wirklichkeit gerecht werden will, darf also nicht voraussetzen, daß der Drehpunkt C in der Geraden AB liege.



In Fig. 22d stelle C den Drehpunkt (Vertikalschnitt der Schneide C), G den Schwerpunkt des Wagbalkens vor, dessen Gewicht Q sei.

Wird der anfänglich gleichen Belastung (P) der Schneiden A und B auf der rechten Seite das Übergewicht p hinzugefügt, so erfolgt eine Drehung des Wagbalkens um C, welche mit einer neuen Gleichgewichtslage endigt, bei welcher die Punkte A′, B′, D′, G′, in den Endpunkten von Kreisbögen

liegen, welche mit den Radien CA, CB, CD, CG um C beschrieben sind. In C findet, vertikal nach oben gerichtet, ein Gegendruck statt gleich der Summe $(2P + p + Q)$ aller Kräfte, der sich mit diesen Kräften zu drei Kräftepaaren verbindet.

Die Gleichung der Momente ist

$$-(P + p)\,EB' + P \cdot A'F + Q \cdot G'H = 0.$$

Bezeichnet man den Ausschlag, welchen das Übergewicht p hervorbringt, nämlich den Winkel D'CD, mit α, die halbe Länge $(DA = DB)$ des Wagbalkens mit l, den Abstand (DG) des Schwerpunktes G von der Gerade AB mit a, und die Erhebung CD des Drehpunktes über dieselbe Geraden mit b, so ist

$$EB' = MB' \cos\alpha = (l - MD') \cos\alpha = (l - b \operatorname{tang}\alpha) \cos\alpha$$
$$A'F = MA' \cos\alpha = (l + MD') \cos\alpha = (l + b \operatorname{tang}\alpha) \cos\alpha$$
$$G'H = CG' \sin\alpha = (a + b) \sin\alpha$$

Setzt man diese Werte ein und dividiert die Gleichung durch $\cos\alpha$, so erhält man

$$(P + p)(l - b \operatorname{tang}\alpha) = P(l + b \operatorname{tang}\alpha) + Q(a + b) \operatorname{tang}\alpha$$

$$\text{oder } \operatorname{tang}\alpha = \frac{p\,l}{Q\,a + b\,(2P + p + Q)}.$$

Da es sich immer nur um kleine Ausschläge handelt, so kann man annähernd α für tang α setzen und erhält als Maß für die Empfindlichkeit der Wage, d. h. für den durch die Gewichtseinheit hervorgebrachten Ausschlag

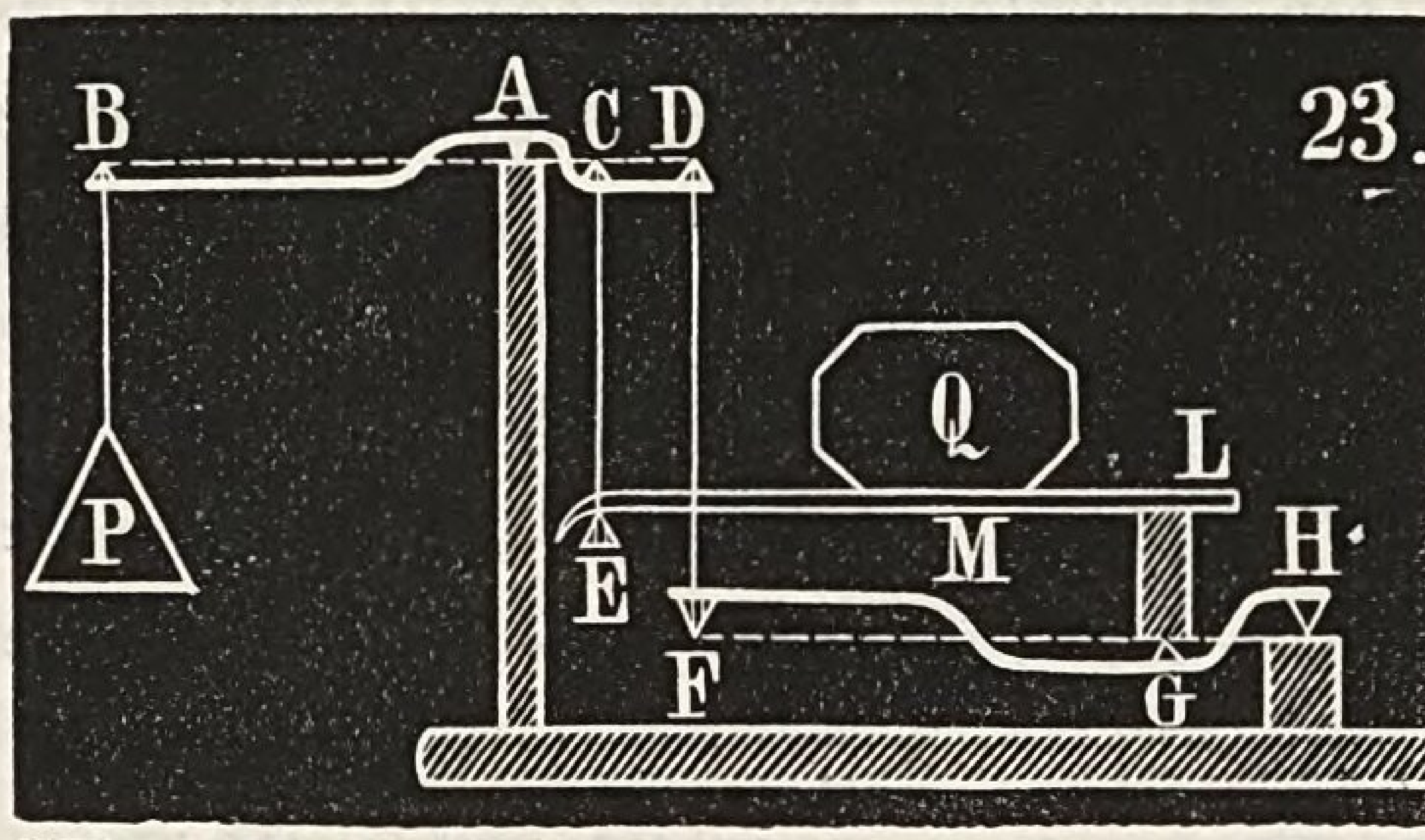
$$\frac{\alpha}{p} = \frac{l}{Q\,a + b\,(2P + p + Q)}.$$

Daraus ergibt sich, daß die Empfindlichkeit einer Wage von der Belastung unabhängig wäre, wenn ihr Drehpunkt C stets in der Geraden AB läge, d. h. b konstant Null wäre. Den Lehren der praktischen Mechanik gemäß wächst aber b proportional der Belastung und der dritten Potenz von l. Demnach ist es möglich, daß bei großer Belastung eine kurzarmige Wage von gleichem Gewichte Q empfindlicher ist als eine solche mit längeren Armen. Im übrigen tritt der Einfluß von l, Q,

a auf die Empfindlichkeit so deutlich zu Tage, daß derselbe einer weiteren Erklärung nicht bedarf.

Das Gleichgewicht ist stabil, solange sich für $\frac{\alpha}{p}$ ein positiver Wert von endlicher Größe berechnet.

§ 85. **Die Straßburger oder Brückenwage** von Quintenz. Dieselbe ist eine Zusammensetzung aus drei Hebeln



BD, EL, FH (Fig. 23). Der Wagbalken BD balanciert auf einer Schneide in A, trägt in B das Gewicht P und auf 2 Schneiden in C und D mittelst der Stäbe CE, DF die Last Q, welche auf der Brücke EL ruht und vermöge LG auf den Hebel FH einen Druck ausübt. Der Hebel EL hat seinen Stützpunkt in L (G) und der Hebel FH in H. Die ganze Einrichtung ist darauf berechnet, daß die Last Q, an welcher Stelle der Brücke EL sie auch liegen mag, stets so wirkt, als ob sie im Punkte C angehängt wäre. Unter dieser Voraussetzung ist dann die Bedingung des Gleichgewichts

$$\overline{AB} \cdot P = \overline{AC} \cdot Q.$$

Die Einrichtung ergibt sich nun aus folgender Erwägung. Der eine Summand (Q_1) der in M angreifenden Last Q zieht bereits in C, der andere (Q_2) drückt in G auf den Hebel HF, dessen Drehpunkt in H ist. Das Drehungsmoment $\overline{HG} \cdot Q_2$ kann ersetzt werden, durch $\overline{HF} \cdot Q_3$, wobei Q_3 so zu wählen ist, daß die Momente gleich werden. Dann zieht Q_3 in D und liefert ein Kräftepaar vom Momente $Q_3 \cdot \overline{AD}$, welches nach der Absicht des Erfinders ebenso stark wirken soll, wie wenn Q_2 in C angebracht wäre. Daraus ergibt sich die Forderung $Q_3 \cdot \overline{AD} = Q_2 \cdot \overline{AC}$. Da aber der Wert von Q_3 sich aus

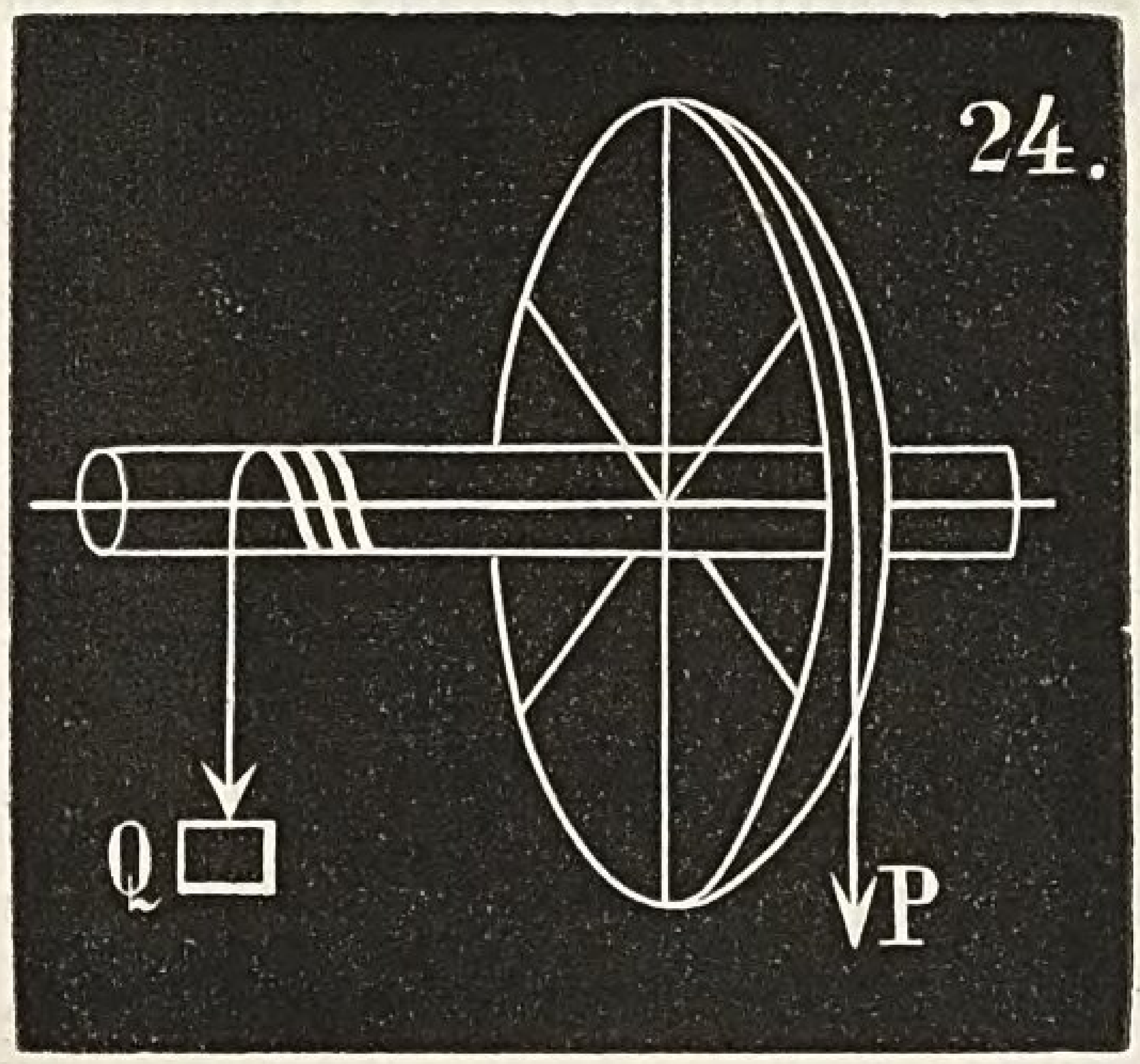
$$Q_3 \cdot \overline{HF} = Q_2 \cdot \overline{HG}$$

berechnet, so kann die Forderung dadurch erfüllt werden, daß

man $\frac{AD}{AC} = \frac{HF}{HG}$ macht.

Ist diese Konstruktionsbedingung erfüllt, so ist die Lage von Q völlig gleichgiltig, was ein großer praktischer Vorteil ist. Häufig ist $AC = \frac{1}{10} AB$. In diesem Falle heißt die Wage Decimalwage, und es hält 1 Kilogramm Gewicht eine Last von 10 Kilogramm im Gleichgewicht. Dieselbe ist indessen auch als Centesimalwage im Gebrauch, um Wagenladungen zu wägen.

§ 86. **Das Wellrad.** (Fig. 24.) An einem um seine Achse drehbaren Cylinder (der Welle) ist eine kreisrunde Scheibe oder ein Rad so befestigt, daß der Mittelpunkt in die Achse der Welle fällt. Um beide Teile, Welle und Rad, winden sich in entgegengesetzter Richtung zwei Seile, an deren Enden zwei parallele Kräfte P und Q wirken.



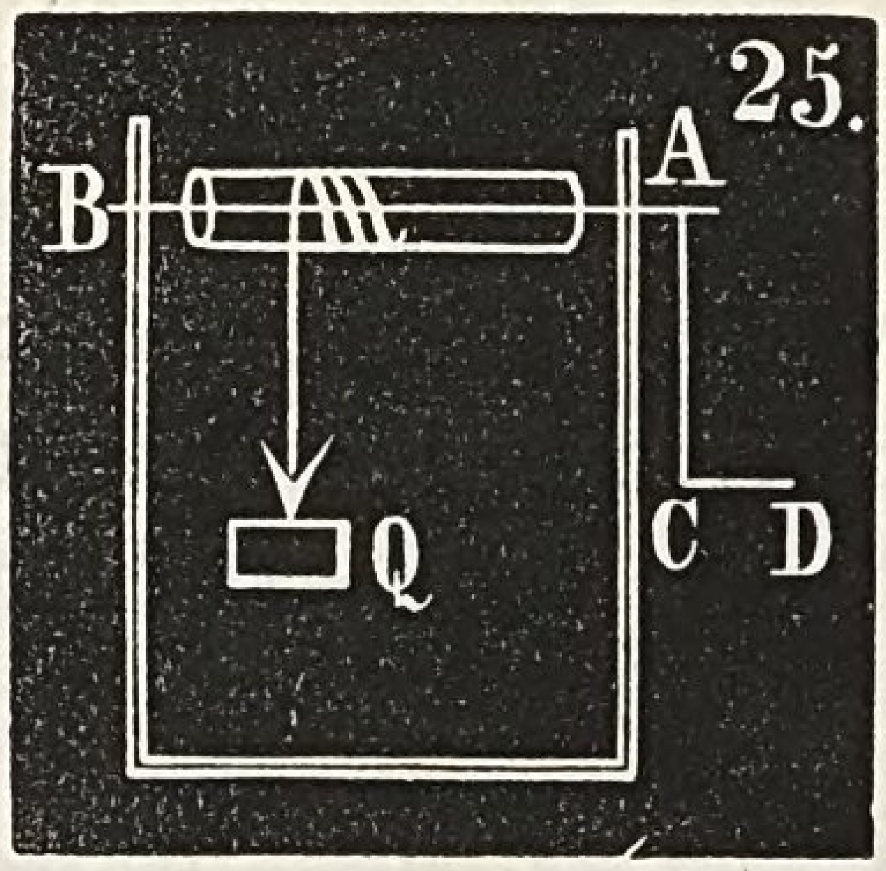
Die Angriffspunkte der Kräfte liegen in der Peripherie von Welle und Rad, der Stütz- oder Drehpunkt in der Achse. Die Bedingung des Gleichgewichts besteht hier in der Gleichheit der Drehungs-Momente an Welle und Rad

$$r \cdot Q = R \cdot P,$$

und die Wirkungsweise darin, durch eine verhältnismäßig kleine Kraft P eine große Last (Q) zu heben.

Multipliziert man die Gleichung des Gleichgewichts beiderseits mit 2π, so erhält man eine Gleichung, welche aussagt, daß bei jeder Umdrehung des Systems das Produkt aus der Last in den Weg ihres Angriffspunktes dem Produkte aus der Kraft in den Weg ihres Angriffspunktes gleich ist. (Goldene Regel der Mechanik.)

§ 87. **Der Haspel.** Tritt im vorhergehenden Falle an die Stelle des Rades eine Speiche AC (Fig. 25) mit einem

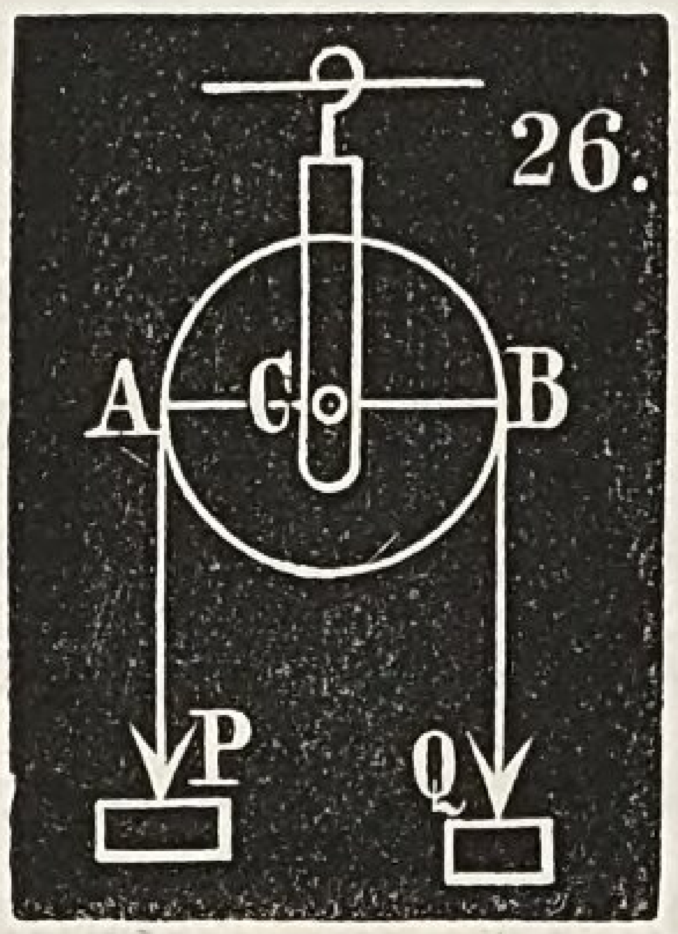


25.

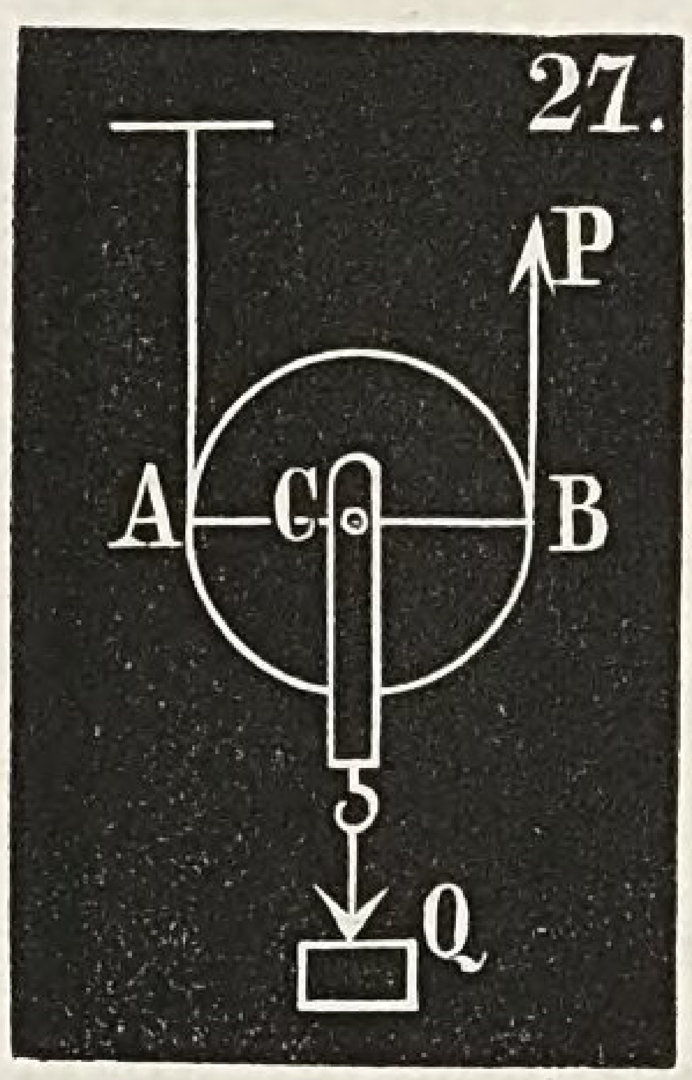
Griffe CD, so heißt die Vorrichtung Haspel, AC der Triebstock, ACD die Kurbel. Die Gleichgewichtsbedingung bleibt dieselbe, nämlich

$$r \cdot Q = AC \cdot P.$$

§ 88. **Die Rolle.** Dieselbe ist eine kreisrunde, um eine Achse bewegliche Scheibe mit einem hohlen Rande (Nute) zur Aufnahme eines Seiles, an dessen Enden zwei Kräfte P und Q wirken. Die Rolle ist entweder fest (Fig. 26), oder beweglich (Fig. 27).



26.



27.

Bei der festen Rolle sind, so lange AP ǂ BQ, die Angriffspunkte der Kräfte in den Endpunkten des Durchmessers AB, die Achse in C der Mitte von AB; daher die Bedingung des Gleichgewichts

$$AC \cdot P = BC \cdot Q \text{ oder } P = Q.$$

Diese Bedingung ändert sich nicht, wenn sich die Richtungen der Kräfte ändern, wohl aber ändert sich dann die Größe und Richtung des Druckes auf die Achse. Während dieser nämlich in Fig. 26 gleich der Summe aus P, Q und dem Gewichte der Rolle ist, setzt er sich bei schiefen Kräften nach den Regeln der §§ 25—27 zusammen, und seine im allgemeinen nicht mehr vertikale Richtung wird auch eine Abweichung des Hängelagers der Rolle von der Vertikalen veranlassen.

Die Wirkungsweise der festen Rolle besteht demnach darin, der Kraft eine bestimmte Richtung anzuweisen, ohne daß diese Richtungsänderung einen Einfluß auf die Größe der Kraft gewinnt. Die feste Rolle heißt deshalb auch Leitrolle.

Bei der beweglichen Rolle sind die Angriffspunkte in

B und C, der Stützpunkt in A; daher die Bedingung des Gleichgewichts $AB \cdot P = AC \cdot Q$ oder wegen $AB = 2\,AC$:

$$2\,P = Q.$$

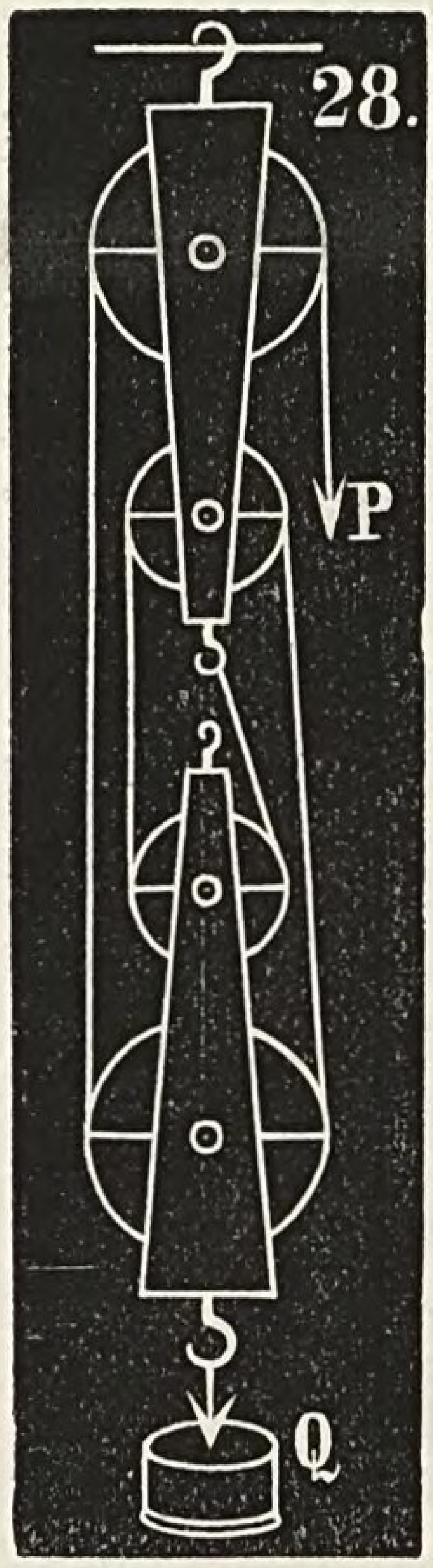
Da die Achse C hier nicht fest ist, kann sie (abgesehen von dem Widerstande, den sie gegen Durchbiegung und Abscheerung leistet), der äußeren Kraft oder Last Q eine vertikal nach oben gerichtete Gegenkraft nicht entgegenstellen. Diese wird vielmehr als Resultante von den beiden Kräften geliefert, welche in B und A angreifen. Da nun vermöge der Beweglichkeit der Aufhängevorrichtung CQ stets vertikal hängt, so muß auch die Resultante der aufwärts gerichteten Kräfte stets vertikal nach oben ziehen. Weicht die Richtung der äußern Kraft P von der Vertikalen ab, so muß im Falle des Gleichgewichts auch die Richtung des in A angreifenden Seiles AT von der Vertikalen abweichen, weil eine Vertikale mit einer nicht vertikalen Kraft eine vertikale Resultante nicht geben könnte.

Da ferner die Richtungen der Kräfte tangential zur Rolle sind, die Resultante durch den Mittelpunkt C gehen muß, weil nur hier eine Übertragung von Kraft zwischen der Rolle und dem Bügel CQ stattfinden kann, und der Durchmesser den Winkel der Tangenten halbiert; so sind die Kräfte P und T auch dann gleich groß, wenn sie einen von 90^0 verschiedenen Winkel mit AB bilden. Somit hat jede Abweichung der Richtung BP von der Vertikalen eine Veränderung zur Folge, welche zu einer neuen Gleichgewichtslage führen kann. In dieser weichen die Richtungen der gleich großen Kräfte P und T nach verschiedenen Seiten um gleichviel $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ von der Vertikalen ab und müssen der Gleichung

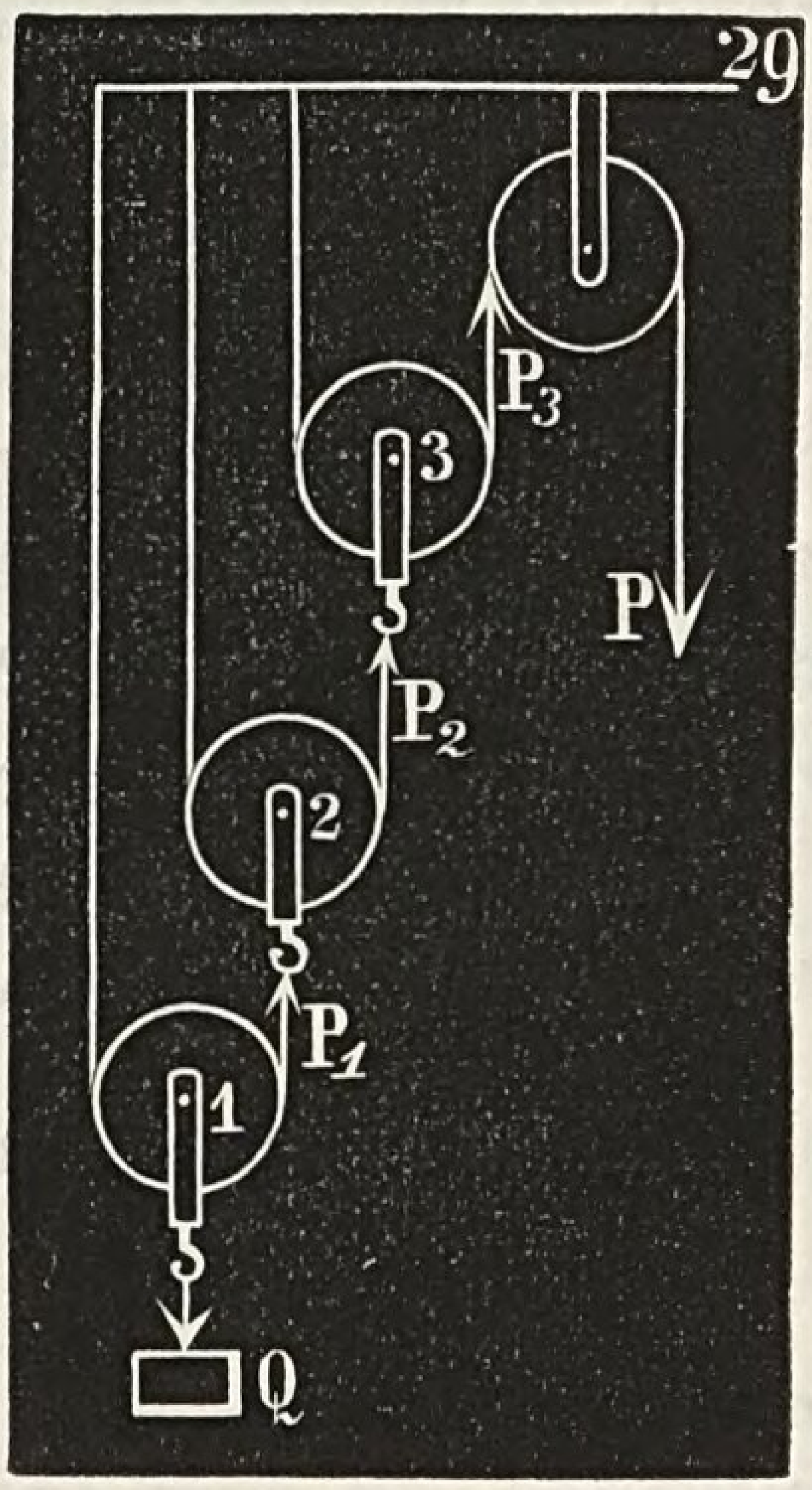
$$Q = 2\,P \cos\frac{\alpha}{2}$$

genügen.

§ 89. **Der Flaschenzug.** Derselbe besteht aus zwei



Gehäusen (Flaschen), von denen jedes dieselbe Anzahl Rollen trägt, wie Fig. 28 veranschaulicht. Die untere Flasche ist beweglich, die obere fest. Durch Vermittelung der Rollen ist die Last Q an 4 Seilen aufgehängt, von welchen jedes $\frac{1}{4}$ der Last aufnimmt. Das letzte Seil geht über die oberste Leitrolle und dient der Kraft P zum Angriff. Diese hat somit in dem durch die Figur dargestellten Falle bei Gleichgewicht den Wert $\frac{1}{4}$ Q, wozu noch der vierte Teil des Gewichts der beweglichen Flasche kommt. Mehr als drei Rollen pflegt man in eine Flasche nicht zu vereinigen.



§ 90. **Der Potenzflaschenzug.** Derselbe ist eine Zusammensetzung aus beweglichen Rollen mit einer festen, wie Fig. 29 veranschaulicht. Es sei n die Anzahl der beweglichen Rollen. Soll die an der festen Leitrolle wirkende Kraft P Gleichgewicht herstellen und bezeichnen wir mit P_1, P_2, P_3 . . P_n die Kräfte, welche an den von Q aus auf einander folgenden Rollen angreifen, so haben wir nach § 88

$$\begin{aligned} Q &= 2P_1 \text{ an der Rolle } (1) \\ P_1 &= 2P_2 \quad \text{" \quad " \quad "} \quad (2) \\ P_2 &= 2P_3 \quad \text{" \quad " \quad "} \quad (3) \\ &\vdots \\ P_{n-1} &= 2P_n \quad \text{" \quad " \quad "} \quad (n) \\ \hline Q &= 2^n P_n \end{aligned}$$

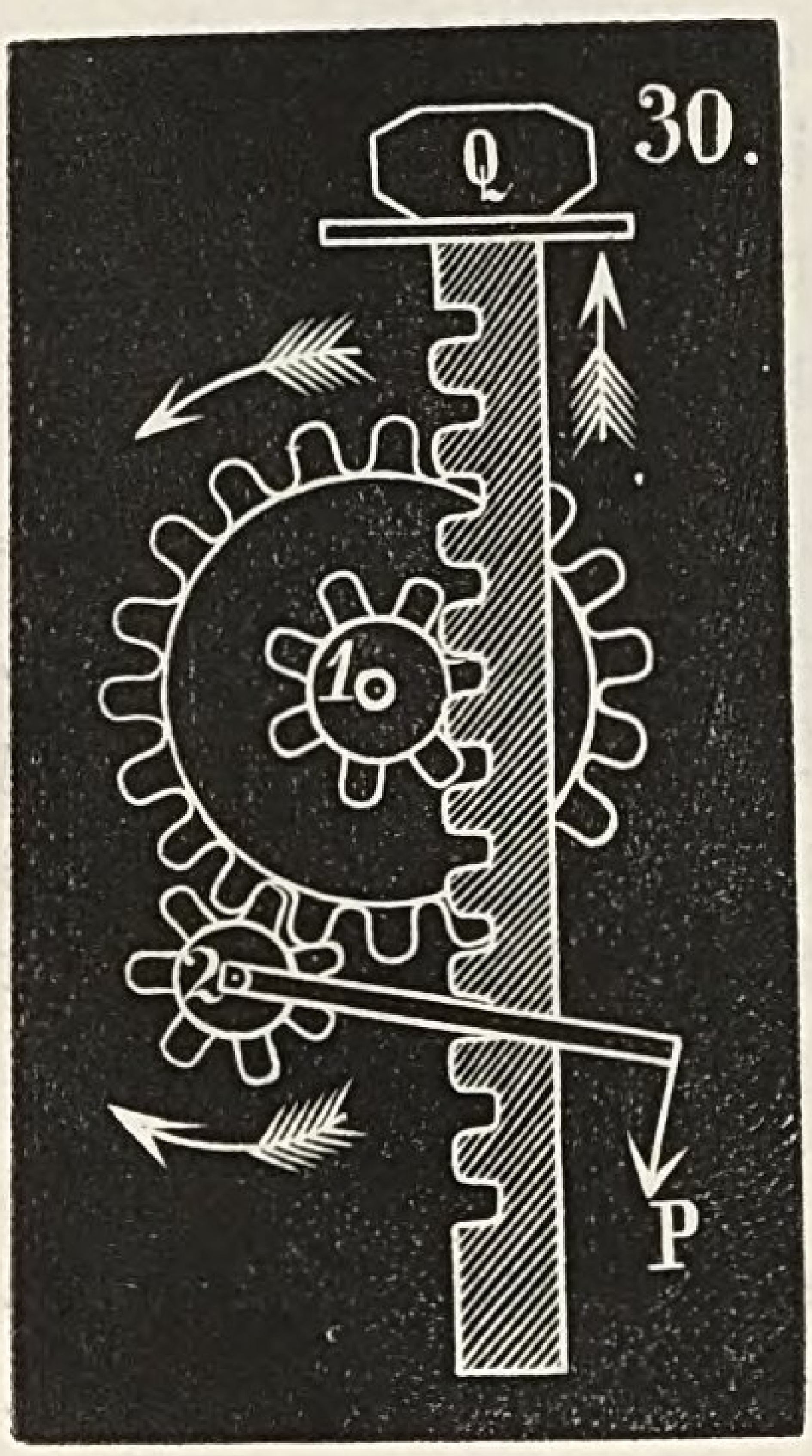
und da $P = P_n$, $Q = 2^n P$

als Bedingung des Gleichgewichts für n bewegliche Rollen.

Dabei ist von dem Gewichte der Rollen abgesehen. Haben alle Rollen das gleiche Gewicht (R), so ist Gleichgewicht, wenn

$$P_n = \frac{Q}{2^n} + \frac{2^n - 1}{2^n} R.$$

§ 91. **Die Winde.** Dieselbe besteht aus einer gezahnten Stange, welche gegen die Last Q drücken soll, und einem Räderwerk, in welches die an einer Kurbel (Fig. 30) wirkende Kraft P eingreift. In die gezahnte Stange greift die gezahnte Welle (Trieb 1), an welcher ein gezahntes Rad befestigt ist. In dieses letztere greift die gezahnte Welle (Trieb 2), mit welcher eine Kurbel verbunden ist. Das Ganze ist demnach eine Zusammensetzung aus einem Wellrad und einem Haspel, von welchen jedes eine selbständige feste Achse besitzt, die in das feste Gehäuse der Winde eingelagert ist. Bezeichnen wir den Radius des Rades mit R_1,*) die Radien der Triebe mit r_1 und r_2, die Länge der Kurbel mit R_2, so hat zunächst das Kräftepaar PR_2 am Triebe (2) dem Kräftepaar P_1r_2 das Gleichgewicht zu halten, wenn P_1 die Kraft ist, welche von den Zähnen des Rades auf den Trieb (2) übertragen wird. Diese Kraft P_1 ist die Kraft eines Kräftepaares $P_1R_1 = Qr_1$, welches durch den Angriff der Last Q am Triebe (1) hervorgerufen wird. Aus



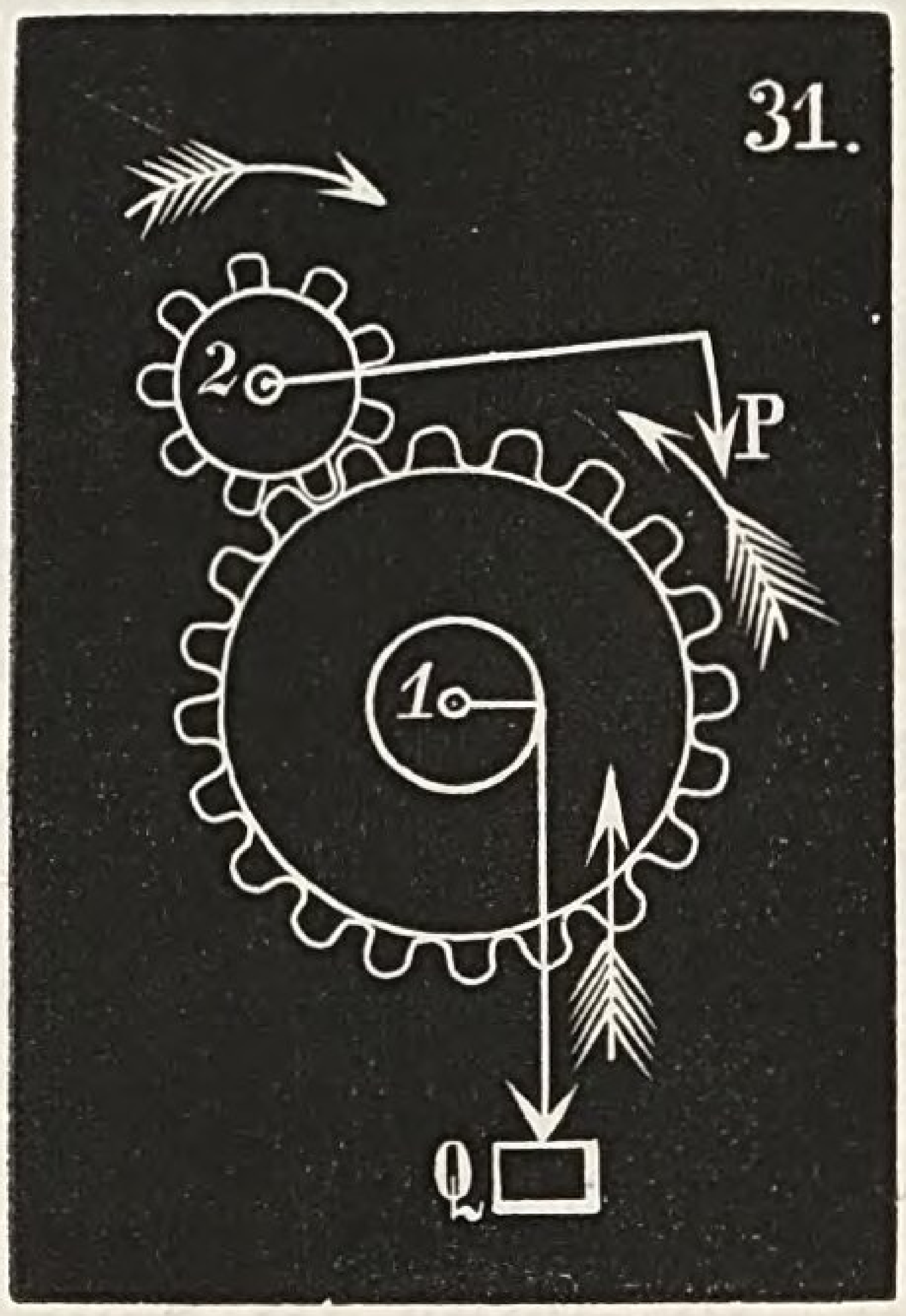
$$PR_2 = P_1r_2$$
$$P_1R_1 = Qr_1$$

folgt $R_1 \cdot R_2 \cdot P = r_1 \cdot r_2 \cdot Q$

*) Die Radien werden bei gezahnten Rädern ungefähr bis zur halben Zahnlänge gezählt.

als Bedingung des Gleichgewichts. Die Pfeile geben die Richtung der Drehungen, welche beim Heben der Last ausgeführt werden.

Der Bauaufzug ist eine Winde, an welcher die Welle (1) nicht gezahnt, sondern bestimmt ist, die Windungen eines Seiles aufzunehmen, an dessen einem Ende die Last Q sich befindet, welche aufgezogen werden soll.



Eine ähnliche Maschine ist ferner der Krahn oder Kranich, welcher häufig eine Welle mit einem gezahnten Rade mehr enthält, und zum Heben schwerer Lasten an Ladeplätzen der Frachtgüter zu Wasser und zu Land benützt wird. Eine Leitrolle führt das Seil der Last von der Welle (1) über einen Schnabel. Die ganze Maschine ist um eine vertikale Achse drehbar. Die Gleichgewichtsbedingung ist

$$R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot P = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot Q,$$

eine den Mechanikern wohlbekannte Regel.

§ 92. Auch für die in §§ 88 bis 91 behandelten Maschinen läßt sich die goldene Regel der Mechanik nachweisen, welche eintritt, sobald man sich die Maschinen in Bewegung denkt. Überall ist das Produkt aus der Kraft in den von ihrem Angriffspunkte zurückgelegten Weg gleich dem Produkte der Last in die von dem Angriffspunkte der Last durchmessene Strecke.

Damit z. B. bei dem Flaschenzuge die Last um die Strecke a gehoben werde, ist nötig, daß sich jedes der vier Seile um a verkürze. Das ganze Seil muß demnach um 4 a kürzer werden, was dadurch geschieht, daß sich der Angriffspunkt von P um die Strecke 4 a fortbewegt.

Bei dem Potenzflaschenzuge muß, damit Q um a gehoben werde, P_1 den Weg 2 a, also P_2 den Weg 4 a, P_3 den Weg 8 a . . . P_n und somit auch P den Weg 2^n a machen.

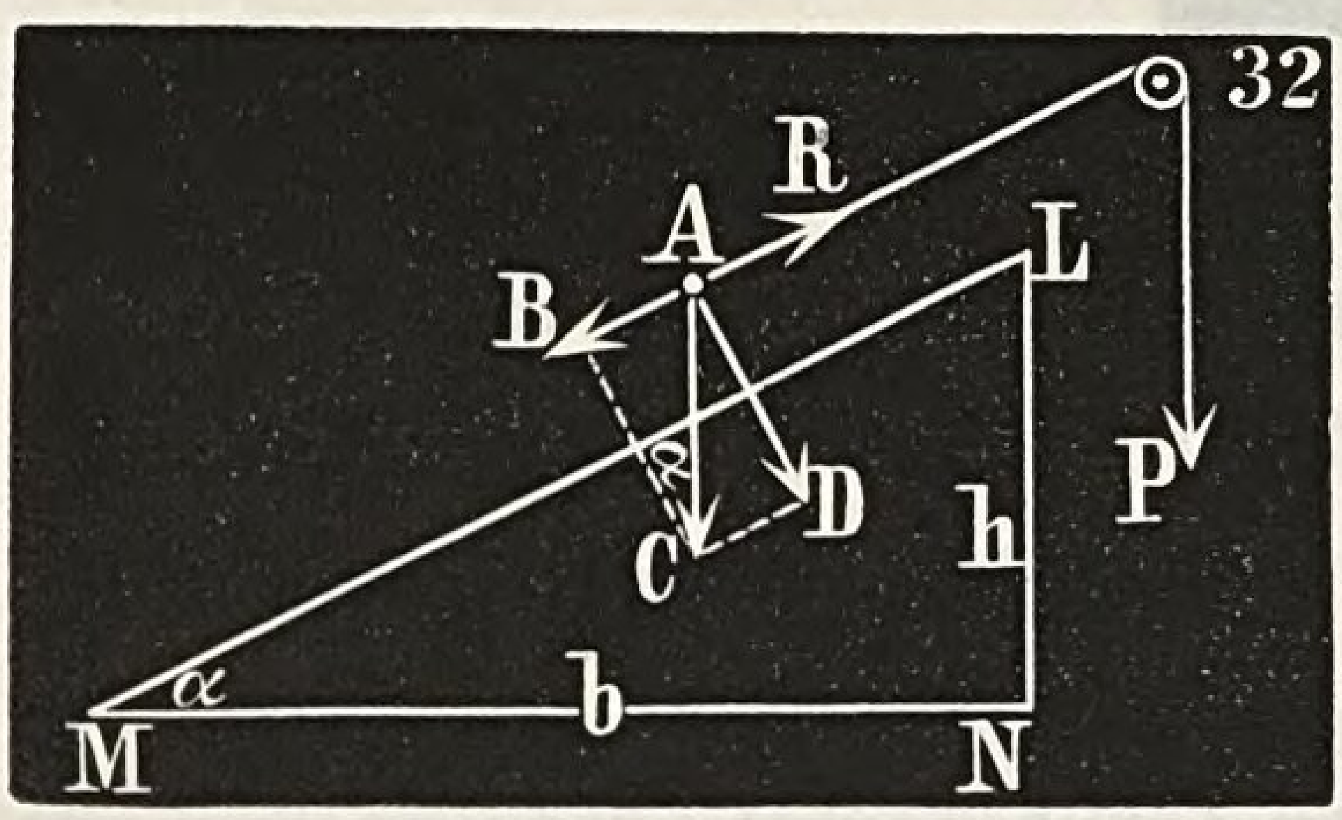
Damit an der Winde Q den Weg a mache, muß ihn auch ein Punkt am Umfange des Triebes (1) machen, folglich macht der Angriffspunkt der Kraft P_1 den Weg $\frac{R_1}{r_1}a$, und endlich P den Weg $\frac{R_2}{r_2} \cdot \frac{R_1}{r_1} a$. Die goldene Regel verlangt

$$Qa = P \cdot \frac{R_2}{r_2} \cdot \frac{R_1}{r_1} a,$$

welche Gleichung durch die Gleichgewichtsbedingung ausgesprochen ist.

Anmerkung. Würde man die goldene Regel als Prinzip aufstellen, was in der That mittelst des (dynamischen) Lehrsatzes von der Erhaltung der Kraft geschehen kann, so würden sich aus ihr die Gleichgewichtsbedingungen ableiten lassen.

§ 93. **Die schiefe Ebene.** Schief heißt jene Ebene, welche gegen den Horizont eine Neigung $\alpha < 90^0$ hat. In Fig. 32 stellt MN die Richtung der horizontalen, LN die der vertikalen und LM die der schiefen Ebene vor. Da LN ⊥ MN ist, so heißt LN auch die Höhe und MN die Basis der schiefen Ebene. Befindet sich eine Last vom Gewichte Q, deren Schwerpunkt in A sei, auf einer solchen Ebene, so wird sie von der Schwerkraft in der Richtung AC ‡ LN mit einer Stärke gleich ihrem Gewichte angezogen. Die Ebene, welche wir vollkommen glatt d. i. reibungsfrei voraussetzen, leistet Widerstand und der Körper wird, sich selbst überlassen, anfangen, längs LM abwärts zu gleiten. Soll die Last auf der Ebene im Gleichgewicht erhalten werden, so muß eine Kraft P angebracht werden, deren Größe zu bestimmen ist. Die Richtung, welche man der Kraft P gibt, ist mitbestimmend für ihre Größe.



a) Wirkt P ‡ LM (Fig. 32) und zerlegen wir die Kraft AC = Q in die rechtwinkeligen Komponenten AB und AD,

$= 2r\pi =$ dem Cylinderumfang, wenn r dessen Radius bezeichnet. Auf jeden Schraubenumgang trifft daher eine Weg-Länge $s = AC = CE = EG$ und eine Höhe $h = AB = BD = DF$. Der senkrechte Abstand AB heißt Ganghöhe, der Cylinder Schraubenspindel und die der Spindel angepaßte Höhlung*) Schraubenmutter, das Ganze (Spindel und Mutter) nennt man Schraube. In der Anwendung dient die Schraube, teils einen Druck auszuüben, wie bei Pressen, teils Lasten zu bewegen.

Dabei ist entweder die Schraubenspindel fest, und die Schraubenmutter gleitet auf den Windungen der Spindel; oder es ist die Schraubenmutter fest, und die Spindel bewegt sich in den hohlen Gängen derselben.

Um die Gleichgewichtsbedingung der flachgängigen Schraube für den Fall zu finden, daß die Gänge vollkommen reibungsfrei (glatt) sind, nehmen wir die Erfahrung zu Hilfe, daß ein längs der Achse der beweglich gedachten Spindel ausgeübter Druck eine Bewegung der Spindel verursacht, welche durch ein Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht zur Spindelachse liegt, vereitelt werden kann. Es ist dann noch die Aufgabe zu lösen, das Moment dieses Kräftepaares zu finden. Zu diesem Zwecke denken wir uns den Druck Q, welcher längs der (vertikal gedachten) Spindelachse wirkt, gleichmäßig über die n Schraubengänge verteilt und beschränken die Betrachtung auf einen derselben. Die Spindel überträgt an den einzelnen Flächenelementen der Gangtiefe zusammen den vertikalen Druck $p = \frac{Q}{n}$ auf die Schraubenmutter, welche gegen denselben in der Richtung ihrer

---

*) Die schematische Darstellung sieht von der Tiefe des Ganges ab. Will man eine solche hervorbringen, so hat man dem Dreieck AFG eine gewisse Dicke (senkrecht zur Ebene der Zeichnung) zu geben und durch eine zu AG Parallele wegzuschneiden, was nicht mit aufgewickelt werden soll. Die Gangtiefe entspricht der Tiefe der Ganghöhlen in der Schraubenmutter. Die vorstehende Beschreibung paßt übrigens nur auf diejenige Art von Schrauben, welche man flachgängig heißt.

Normale zurückwirkt. Diese Normalkräfte weichen an Stellen, welche um eine halbe Windung auseinander liegen, in entgegengesetztem Sinne von der Vertikalen ab, aber stets um den gleichen Winkel, welcher dem Elevationswinkel (α) der aufgewickelten schiefen Ebene (dem Steigungswinkel der Schraube) gleich ist. Zerlegt man den Gegendruck überall in zwei Komponenten, deren eine dem an der betreffenden Stelle vorhandenen vertikalen Niederdrucke (p_1) gleich und entgegengesetzt ist, so ist die andere Komponente, weil sie keinerlei Wirkung in vertikaler Richtung hervorbringen soll, horizontal zu nehmen und erhält die Größe $p_1 \tang \alpha$. Solche horizontalen Kräfte erhält man nun so viele, als man Flächenelemente auf dem Gange angenommen hat, und je zwei derselben, welche um einen halben Gang auseinander liegen, bilden ein Kräftepaar. Die Ebenen dieser Kräftepaare sind nicht horizontal, jedes derselben kann aber (nach § 54) in zwei Paare zerlegt werden, von welchen das eine in horizontaler, das andere in vertikaler Ebene dreht. Letzteres ziehen wir nicht weiter in Betracht, weil die Spindel diese Drehung nicht ausführen kann. Die horizontalen Paare können (nach § 46) in eine Ebene verlegt werden. In dieser Ebene hat man nun halb soviel Paare als Flächenelemente angenommen wurden, jedes mit zwei Kräften von der Größe $p_1 \cos \alpha$, aber mit etwas verschiedenen Armen, deren Größe zwischen dem Durchmesser des cylindrischen Kernes und dem um die doppelte Gangtiefe vergrößerten Durchmesser variiert. Je zwei derselben können somit zu einem Paare vereinigt werden, welches die doppelte Kraft an einem Arme hat, der um die einfache Gangtiefe (t) größer ist als der Durchmesser des Kernes. Das Moment derselben ist somit $(2r + t)\, 2p_1 \tang \alpha$. Die Summe aller Momente wird erhalten, wenn man den gemeinschaftlichen Arm $(2r + t)$ mit der Summe aller Horizontalkräfte auf der halben Windung, nämlich $\frac{p}{2} \tang \alpha$ multipliziert. Somit liefert jede Windung ein Kräftepaar vom Momente

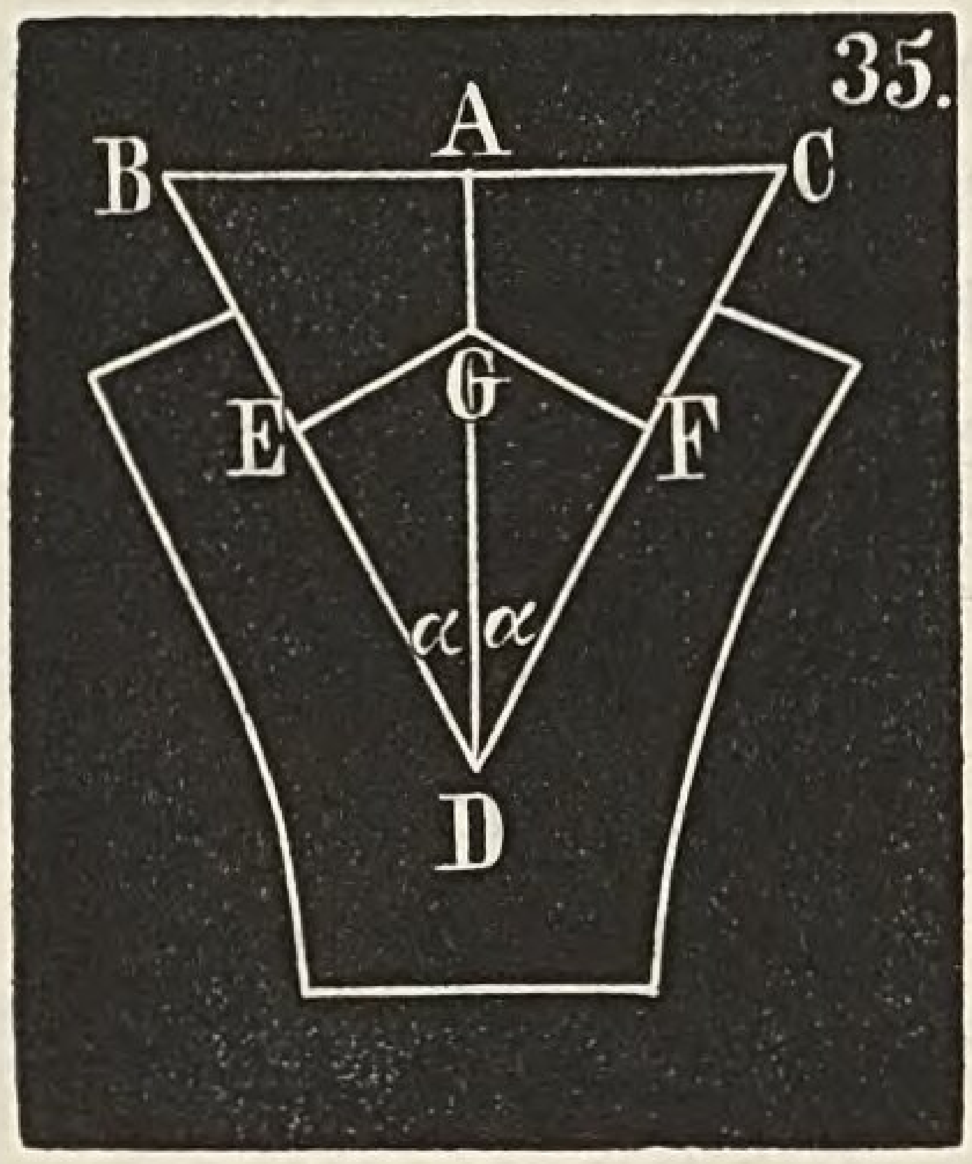
$\left(r + \frac{t}{2}\right)p \tan \alpha = \left(r + \frac{t}{2}\right)\frac{Q}{n} \tan \alpha$ und die n Windungen das Moment

$$\left(r + \frac{t}{2}\right) Q \tan \alpha$$

eines Kräftepaares, welches man in irgend einem Horizontalschnitte der Spindel wirkend denken kann. Dasselbe dreht in dem Sinne der Aufwickelung. Ein Paar von gleichem Momente und entgegengesetztem Sinne stellt Gleichgewicht her. Die $\tan \alpha$ kann durch den Quotienten ausgedrückt werden, dessen Zähler die Ganghöhe und dessen Nenner der Umfang der Schraube ist.

§ 95. **Der Keil.** Derselbe ist ein dreiseitiges Prisma, dessen Basis ein beliebiges Dreieck sein kann, in der Regel jedoch ein rechtwinkeliges oder gleichschenkliges Dreieck ist. Der Keil dient zum Heben, Klemmen, Trennen, Spalten u. s. w. fester Körper. Die eindringende Kante heißt Schneide, die gegenüberliegende Fläche Rücken des Keiles. In dem gleichschenkeligen $\triangle$ BCD (Fig. 35), welches einen normalen Schnitt vorstellt, sind BD = CD = s die Seiten, AD = h die Höhe (Länge), BC = b die Breite des Keiles. Wird nun ein solcher Keil durch eine Kraft P, welche in A der Mitte von BC angreift und längs AD wirkt, in einen festen Körper eingetrieben, so bewegen sich die Seiten BD und CD parallel zu sich selbst und haben einen gewissen Widerstand zu überwinden. Sind die Widerstände gleich und gleichmäßig über die Seiten verteilt, so tritt keine Drehung ein, und die Summe aller Widerstände welche auf eine Seite wirken, kann durch eine Einzelkraft K ausgedrückt werden, welche auf beiden Seiten gleich ist und ihren Angriffspunkt in E und F haben soll.

35.



Sind die Seiten vollkommen glatt, so ist der in E und

F wirkende Widerstand nichts anderes, als ein auf BD und CD normaler Druck = K. Verlegen wir die Angriffspunkte nach G, so ist die Bedingung des Gleichgewichts, daß AG = P der Resultante aus EG = FG = K gleich ist, wenn wir das Gewicht des Keiles außer Acht lassen. Setzen wir

$\angle$ BDA = $\angle$ CDA = α, also $\angle$ EGF = 180 — 2 α

so folgt

$$(1)\quad P = 2\,K \cos(90 - \alpha) = 2\,K \sin\alpha,$$ oder auch

$$(2)\quad P = \frac{K \cdot b}{s} = \frac{2\,K \cdot b}{\sqrt{b^2 + 4\,h^2}}.$$

Wirken statt des Widerstandes von Kohäsionskräften zwei Kräfte von der Größe Q parallel dem Rücken BC, so können wir Q in eine tangentiale und normale Komponente Q sin α und Q cos α zerlegen und bemerken, daß Q sin α verloren geht, weil die Seiten glatt vorausgesetzt werden, während Q cos α an die Stelle von K in Gl. (1) und (2) tritt; mithin ist

$$(3)\quad P = 2\,Q \cos\alpha \sin\alpha = Q \sin 2\,\alpha,$$ oder auch

$$(4)\quad P = \frac{Q \cdot bh}{s^2} = \frac{4\,Q \cdot bh}{b^2 + 4h^2}.$$

Anm. Wird ein freier Keil von zwei gleichen Gegenkräften in Punkten E und F angegriffen, so daß die Kraftrichtungen mit EF zusammenfallen, so besteht nach § 12 Gleichgewicht, und es müßte jede weitere Kraft P im Widerspruch mit Gl. (3) oder (4) dies Gleichgewicht stören. Thatsächlich findet Gleichgewicht statt, wenn die Angriffspunkte E und F so beschaffen sind, daß die Kräfte wie z. B. durch Ringe, Haken, Stifte, Erhöhungen und Vertiefungen u. d. gl. in jeder Richtung angreifen können; sind aber E und F nichts weiter als Punkte zweier festen, glatten geneigten Ebenen, so findet in Wahrheit nicht Gleichgewicht statt, weil die tangentiale Komponente keinen Angriffspunkt hat und ebendeswegen wirkungslos verloren gehen muß, so daß bei dieser Voraussetzung Gl. (3) oder (4) allein das Richtige gibt. Sind die Seitenflächen rauh, so tritt Reibung als eine weiter zu berücksichtigende Kraft hinzu.

Daß die Natur die Zerlegung der Kräfte Q wirklich ausführt, ist in allen denjenigen Fällen außer Zweifel, in welchem die Angriffspunkte (Flächen) der Kräfte Q längs FD und ED gleiten, was bei vollkommener Glätte wohl unvermeidlich ist. Gleiten die Angriffspunkte nicht, dann ist der Fall des Gleichgewichts gegeben.

Zweiter Teil.

Dynamik.

Erstes Kapitel.

Gleichförmige und gleichförmig beschleunigte Bewegung.

§ 96. Die Begriffe **Bewegung, Geschwindigkeit, Kraft**, sowie das **Trägheitsgesetz** sind bereits in § 2 und § 3 der Einleitung entwickelt worden und mögen, da sie die Grundlage des Folgenden bilden, an dieser Stelle nochmals erwogen werden.

Gleichförmige Bewegung. Wenn auf ein Molekül keine Kraft wirkt, oder wenn die auf dasselbe wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so bethätigt es nur sein eigenes Bewegungsvermögen, d. h. seine Geschwindigkeit ist der Richtung und Größe nach konstant. Die Bahn des Moleküls ist also geradlinig, und es legt in jeder Zeiteinheit eine gleich große Wegstrecke zurück. Wählen wir die Sekunde als Zeiteinheit und das Meter als Längeneinheit, und ist, auf diese Einheiten bezogen, c die Größe der konstanten Geschwindigkeit, so folgt, daß der materielle Punkt, der nur sein eigenes Bewegungsvermögen bethätigt, in der Zeit t (t Sekunden) einen Weg s (Meter) zurücklegt von der Länge

$$s = tc \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit heißt *gleichförmig*. Die eben aufgestellte Gleichung gibt den einfachen Zusammenhang, in welchem bei der gleichförmigen Bewegung die drei Größen: Geschwindigkeit, Zeit und zurückgelegter Weg stehen.

Zusatz 1. Aus Gleichung (1) folgt

$$c = \frac{s}{t},$$

d. h. die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung wird erhalten, wenn man den zurückgelegten Weg durch die Zeit dividiert, in welcher er zurückgelegt wurde.

Zusatz 2. Ist die Bewegung nicht gleichförmig, so gibt der Quotient $\frac{s}{t}$ die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher der Weg s durchlaufen wurde.

Unter der mittleren Geschwindigkeit, welche ein Molekül auf einer bestimmten Strecke besitzt, versteht man demnach diejenige konstante Geschwindigkeit, mit welcher das Molekül die Strecke in derselben Zeit durchlaufen würde, welche es thatsächlich zur Zurücklegung der Strecke gebraucht.

Zusatz 3. Um zu untersuchen, ob eine in der Natur vorkommende Bewegung gleichförmig ist oder nicht, hat man verschiedene von dem Bewegten zurückgelegte Strecken und die zugehörigen Zeiten zu messen und sodann die Quotienten $\frac{s_1}{t_1}, \frac{s_2}{t_2} \ldots$ zu bilden.

§ 97. **Geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegung.** Erhält ein materieller Punkt längs derjenigen Geraden, in welcher er bereits die Geschwindigkeit c besitzt, fortwährend neue Geschwindigkeiten, aber so, daß seine Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleich viel zunimmt, so heißt die Bewegung des materiellen Punktes gleichförmig beschleunigt. Die in der Zeiteinheit erfolgende Geschwindigkeitszunahme heißt **Beschleunigung**.

Zählt man die Zeit t von demjenigen Momente an, wo das Molekül die Geschwindigkeit c besitzt und anfängt, konstante Beschleunigungen von der Größe a zu erhalten, so ist nach Verlauf der Zeit t (t Sekunden) seine Geschwindigkeit

$$v = c + ta.$$

Zusatz 1. Gemäß § 3 schließen wir, daß auf den materiellen Punkt, dessen Geschwindigkeit nach dem eben formulierten Gesetze wächst, eine Kraft von konstanter Größe wirkt,

und daß die Richtung dieser Kraft gleich der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c ist.

Zusatz 2. Erfolgen die Wirkungen der konstanten Kraft zwar längs der Geraden c, aber in der dem c entgegengesetzten Richtung, so wird die Geschwindigkeit des materiellen Punktes nicht vermehrt, sondern vermindert und nimmt in gleichen Zeiten um gleichviel ab. Statt der Beschleunigung tritt eine Verzögerung ein, welcher wir dadurch Ausdruck geben, daß wir der Beschleunigung a das Vorzeichen minus vorsetzen. Die Verzögerung ist demnach negative Beschleunigung.

Hat die Beschleunigung a die der Anfangsgeschwindigkeit c entgegengesetzten Richtung, so ist die Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit t

$$v = c - ta.$$

Dieselbe kann demnach Null und negativ werden.

§ 98. Um die **Länge des Weges** zu finden, den ein gleichförmig beschleunigter materieller Punkt in der Zeit t zurücklegt, ist eine besondere Betrachtung nötig, bei welcher die stetige Wirkung der Kraft dadurch analysiert wird, daß man die Sekunde in eine große Anzahl (n) gleicher Teile teilt und demgemäß die ganze Beschleunigung a in n gleichen Portionen zuführt, so daß die Geschwindigkeit am Anfang eines jeden Zeitteilchens $\left(\frac{1}{n}\text{ Sekunde}\right)$ um $\frac{a}{n}$ wächst. Die Abweichung dieser Vorstellung von der thatsächlichen Stetigkeit des Vorganges wird schließlich dadurch beseitigt, daß man n unendlich wachsen läßt.

Ist die Geschwindigkeit am Anfang der Sekunde v, so wächst sie sofort um $\frac{a}{n}$, und ist demnach

$v + \frac{a}{n}$ im ersten Zeitteilchen, und der Weg ist $\frac{1}{n}\left(v + \frac{a}{n}\right)$

$v + \frac{2a}{n}$ „ zweiten „ „ „ „ „ $\frac{1}{n}\left(v + \frac{2a}{n}\right)$

$v + \frac{3a}{n}$ im dritten Zeitteilchen, und der Weg ist $\frac{1}{n}\left(v + \frac{3a}{n}\right)$

— — — — — — — — — — —

$v + \frac{na}{n}$ " n^{ten} " " " " " $\frac{1}{n}\left(v + \frac{na}{n}\right)$

Um den in der Sekunde zurückgelegten Weg zu erhalten, hat man die sämtlichen in den einzelnen Zeitteilchen zurückgelegten Wege zu addieren.

Man findet

$$\frac{1}{n}\left[nv + \frac{a}{n}\,(1 + 2 + 3 + \ldots . n)\right].$$

Da die arithmetische Progression den Wert $\frac{n\,(n + 1)}{2}$ hat, erhält man

$$v + \frac{a}{2} \cdot \frac{n + 1}{n} = v + \frac{a}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Läßt man nun n unendlich wachsen, so wird $\frac{1}{n}$ zu Null, und der Weg reduziert sich auf den einfachen Ausdruck

$$v + \frac{a}{2},$$

d. h. Wirkt auf einen materiellen Punkt, welcher die Geschwindigkeit v besitzt, in der Richtung dieser Geschwindigkeit eine konstante Kraft, welche dem Punkte die Beschleunigung a erteilt, eine Sekunde lang ein, so legt der Punkt während dieser Sekunde einen Weg zurück, welcher um die Hälfte der Beschleunigung größer ist als seine Anfangsgeschwindigkeit (v).

Zusatz. Ist die Richtung der Beschleunigung (a) der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit (v) entgegengesetzt, so ist der Weg in der Sekunde $v - \frac{a}{2}$.

§ 99. Stellt man dem in § 98 erhaltenen Resultate gemäß die Wege her, welche in den einzelnen Sekunden zurückgelegt werden, indem man jedesmal $\frac{a}{2}$ zu der Anfangsgeschwindigkeit addiert, so erhält man:

Weg in der 1. Sekunde $c + \frac{a}{2}$

" " " 2. " $(c + a) + \frac{a}{2}$

" " " 3. " $(c + 2a) + \frac{a}{2}$

" " " 4. " $(c + 3a) + \frac{a}{2}$

— — — — — — — — —

" " " t^{ten} " $[c + (t - 1)a] + \frac{a}{2}$

Weg in t Sekunden:

$$s = tc + t \cdot \frac{a}{2} + a\,(1 + 2 + 3 + \ldots + t - 1)$$

$$s = tc + t\frac{a}{2} + a \cdot \frac{t\,(t - 1)}{2}$$

$$s = tc + t^2\,\frac{a}{2}.$$

Es setzt sich somit der ganze zurückgelegte Weg zusammen aus zwei Summanden; der erste Summand ist der Weg, den das Molekül vermöge seiner Anfangsgeschwindigkeit (c) allein zurücklegen würde, der zweite Summand wird infolge der Einwirkung der Kraft durchmessen.

Zusatz. Ist keine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden, d. h. wird das Molekül von der Ruhe aus durch die Kraft in Bewegung gesetzt und t Sekunden lang beschleunigt, so legt es während dieser Zeit den Weg $s_0 = t^2\frac{a}{2}$ zurück.

§ 100. Ist die Richtung der Beschleunigung a der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c entgegengesetzt, so ist die schließliche Entfernung (s) des Moleküls von demjenigen Punkte, in welchem es sich am Anfang der Zeit t befand,

$$s = tc - t^2\frac{a}{2}.$$

Es befindet sich demnach das Molekül nach Verlauf der

Zeit t an demselben Orte, an welchen es gekommen wäre, wenn es sich zuerst t Sekunden lang nur mit seiner Anfangsgeschwindigkeit c bewegt hätte, und dann weitere t Sekunden lang nur dem Zuge der Kraft gefolgt wäre.

Da die Geschwindigkeit, welche das Molekül nun besitzt, durch

$$v = c - ta$$

gegeben ist, so erkennt man, daß es sich $t = \frac{c}{a}$ Sekunden lang in der Richtung seiner ursprünglichen Geschwindigkeit (c) bewegt, dann umkehrt, und in den folgenden $\frac{c}{a}$ Sekunden wieder zu seinem Ausgangspunkte zurückkehrt. In diesem angelangt, besitzt es die Geschwindigkeit ($-c$) und bewegt sich nun in der eingeschlagenen Richtung gleichförmig beschleunigt weiter nach den Gesetzen des § 97 und § 99.

Die größte Entfernung, welche das Molekül in der Richtung seiner ursprünglichen Geschwindigkeit erreichen kann, ist $\frac{c^2}{2a}$.

§ 101. Das merkwürdigste **Beispiel für eine geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegung** bietet der **freie Fall.** Wir halten das Fallen der Körper für eine Wirkung der Schwerkraft.

Frei nennen wir den Fall, wenn die Schwerkraft allein auf den Körper wirkt, also irgend welche Kräfte, welche eine Schwächung derselben oder eine Ablenkung des Körpers von der Senkrechten verursachen könnten, nicht vorhanden sind. So ist z. B. nicht frei das Fallen der Körper in der Luft, weil die Luft durch ihren Widerstand die Wirkung der Schwere (die Beschleunigung) vermindert. Ebenso ist nicht frei das Fallen (Hinabrollen oder Hinabgleiten) auf einer schiefen Ebene.

Beseitigt man den Luftwiderstand, indem man den Körper in einer Röhre fallen läßt, aus welcher man die Luft möglichst entfernt (ausgepumpt) hat, so macht man die wichtige Erfahrung, daß alle Körper, sie mögen klein oder groß sein, aus diesem oder jenem Stoffe bestehen, die Länge der Röhre in der-

selben Zeit durchfallen, die Flaumfeder ebenso rasch wie die Bleikugel.

Zu dem gleichen Resultate gelangt man, wenn man ein Papierschnitzel, welches in der Luft merklich langsamer fällt als eine Münze, auf diese Münze legt und letztere nach der Breitseite fallen läßt. Das Papier bleibt dann nicht hinter der Münze zurück, sondern kommt mit ihr gleichzeitig am Boden an.

Läßt man Kugeln von Blei oder Eisen in Luft aus Höhen fallen, welche 30 Meter nicht überschreiten, so ist der Einfluß des Luftwiderstandes nicht so stark, daß dadurch die Gesetze des freien Falles verschleiert würden, und man erhält aus Messungen der durchfallenen Höhen (h) und der zugehörigen Zeiten (t) Gleichungen von der Form

$$h_1 = k t_1^2, \; h_2 = k t_2^2, \; h_3 = k t_3^2 \; \dots .$$

d. h. der Weg ist dem Quadrate der Zeit proportional. Die Konstante k hat den Wert 4,9 Meter.

Andererseits ist nach den Gesetzen der gleichförmig beschleunigten Bewegung

$$s = t^2 \frac{a}{2},$$

wobei a die Beschleunigung bedeutet. Somit folgt für die Beschleunigung des freien Falles

$$\frac{a}{2} = 4{,}9 \text{ oder } a = 9{,}8 \text{ Meter.}$$

Diese Größe pflegt man mit dem Buchstaben g (Gravitation) zu bezeichnen.

§ 102. **Zusammenstellung der Gleichungen** für die freie vertikale Bewegung eines Körpers unter dem Einflusse seiner eigenen Schwere.

1) Ein von der Ruhe aus frei fallender Körper hat nach t Sekunden die Geschwindigkeit

$$v = tg$$

und hat den Weg zurückgelegt $s = t^2 \frac{g}{2}$.

Durch Elimination der Zeit aus diesen beiden Gleichungen findet man, daß ein Körper, der die Höhe $h = s$ frei durchfallen hat, die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh}$$

besitzt.

2) Hat der Körper bereits eine vertikal abwärts gerichtete Geschwindigkeit (c), wenn die Schwere auf ihn zu wirken beginnt, so ist t Sekunden nach Beginn dieser Einwirkung

$$v = c + tg,$$

$$s = tc + t^2\frac{g}{2}.$$

3) (Freies Aufsteigen.) Hat der Körper eine vertikal aufwärts gerichtete Anfangs-Geschwindigkeit von der Größe c, so ist nach t Sekunden

$$v = c - tg,$$

$$h = tc - t^2\frac{g}{2},$$

wobei ein positiver Wert von v bedeutet, daß die Geschwindigkeit des Körpers noch die anfängliche Richtung (von c) hat, während ein negatives Vorzeichen von v andeutet, daß der Körper bereits im Fallen begriffen ist.

h ist der Abstand des Körpers von der Horizontalebene, aus welcher er mit der Geschwindigkeit c aufgestiegen ist.

Die größte Höhe erreicht der Körper zur Zeit $t^1 = \frac{c}{g}$, diese Höhe hat den Wert $H = \frac{c^2}{2g}$. Die Zeit des Herunterfallens ist der des Aufsteigens gleich, und die End-Geschwindigkeit unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen von der Anfangsgeschwindigkeit.

§ 103. **Einheiten der Kraft und der Masse.** Die Erscheinung des freien Falles zeigt uns, wie dieselbe Kraft der Schwere, welcher das Gleichgewicht gehalten wird, wenn wir den Körper s nach den Gesetzen der Statik unterstützen, sich frei

wirkend bethätigt, indem sie der Masse, welcher sie anhaftet, die Beschleunigung g = 9,8 Meter erteilt.

Das Maß für die Größe der Kräfte kann, wie in § 3 erwähnt, von ihrer dynamischen Wirkung, der Beschleunigung, hergenommen werden, welche die Kraft einer bestimmten Masse erteilt, d. h. man betrachtet diejenige Kraft als Krafteinheit, welche einer bestimmten noch festzusetzenden Masse 1 Meter Beschleunigung erteilt.

Andererseits kann man auch ein statisches Maß der Kräfte festsetzen, indem man eine Kraft, welche in den Fällen des § 11 oder § 13 einer zweiten Kraft das Gleichgewicht hält, als Kraft Eins annimmt und somit die Summe der beiden eben im Gleichgewicht befindlichen Kräfte als Kraft von der Größe Zwei erhält u. s. f.

In dieser statischen Weise hat man die Schwerkräfte der Körper, die Gewichte mit einander verglichen und ein solches Gewicht als Gewichtseinheit festgesetzt. Von den verschiedenen Gewichtseinheiten hat sich in der Wissenschaft vorzüglich das Gramm eingebürgert, das Gewicht des Wassers, welches ein Kubikcentimeter ausfüllt, im bürgerlichen Leben das Kilogramm (das Tausendfache des Grammes), und das Pfund (die Hälfte des Kilogramms).

Man kann es nun leicht so einrichten, daß die statische Krafteinheit, das Gramm, zugleich zur dynamischen Einheit wird. Man darf nur die noch nicht bestimmte Masse, welche die Beschleunigung 1 durch die freie Wirkung der Krafteinheit erhalten soll, so groß wählen, daß ihr gerade ein Gramm die Beschleunigung 1 erteilt.

Um die Größe dieser Masse zu ermitteln, bedenken wir, daß die statische Krafteinheit, nämlich die Schwere eines Kubikcentimeters Wasser, der Masse eines Kubikcentimeters Wasser, frei wirkend, die Beschleunigung g = 9,8 Meter erteilt. Daraus folgt (§ 3), daß die Kraft, welche der Masse eines Kubikcentimeters Wasser die Beschleunigung 1 (Meter) erteilen soll, der Schwere von nur $\frac{1}{g}$ Gramm gleich ist.

Da sich ferner nach § 4, 1) die Massen, welche von Kräften gleiche Beschleunigung (1 Meter) erhalten, wie diese Kräfte selbst verhalten, so verhält sich die gesuchte Masse x, welche die Beschleunigung 1 erhalten soll, zu der Masse (m) eines Kubikcentimeters Wasser wie die Kraft 1 zu der Kraft $\frac{1}{g}$

$$x : m = 1 : \frac{1}{g}$$

woraus $x = gm$ d. h. die Masse, welche durch die Schwerkraft eines Grammes die Beschleunigung 1 Meter erhält, ist g mal so groß als die Masse des Wassers, welches ein Kubikcentimeter füllt.

Da alle Massen durch ihre eigenen Gewichte die gleiche Beschleunigung erhalten, so verhalten sich nach § 4, 1) die Massen allgemein wie ihre Gewichte.

Somit erkennt man den Umstand, daß eine Masse g mal so groß ist als die Masse eines Kubikcentimeters Wasser, daran, daß jene Masse g Gramm wiegt.

Es erteilt demnach eine Kraft gleich der Schwere **eines** Grammes einer Masse vom Gewichte g Gramm eine Beschleunigung von 1 Meter.

Es würde hier nichts hindern, als Masseneinheit diejenige Masse anzunehmen, welche ein Gramm wiegt, aber man zieht es mit Rücksicht auf eine dadurch erzielte Vereinfachung der Formeln vor, eben jene Masse von g Gramm als Masseneinheit einzuführen, so daß der Satz erfüllt ist:

Die Krafteinheit erteilt der Masseneinheit eine Beschleunigung gleich der Längeneinheit.

Da demnach g Gramm eine Masseneinheit ausmachen, so enthält eine Q Gramm schwere Masse $\frac{Q}{g}$ Masseneinheiten, d. h. man hat, um aus der Anzahl der Gewichtseinheiten einer Masse die Anzahl der Masseneinheiten abzuleiten, das Gewicht durch die Zahl g zu dividieren, wobei g die Anzahl der Längeneinheiten der Fallbeschleunigung ist.

Zusatz zu § 103. In neuerer Zeit hat man vorzüglich mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Elektrotechnik international ein Maßsystem vereinbart, welches sich von dem eben dargelegten in einem wesentlichen und in einem unwesentlichen Punkte unterscheidet.

Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß in dem neueren Maßsysteme nicht die Kraft sondern die Masse selbständig (als Urmaß) definiert ist, so daß es in demselben drei absolute oder Urmaße gibt: die Zeiteinheit gleich der Sekunde (S), die Längeneinheit gleich dem Centimeter (C), die Masseneinheit (G) gleich der Wassermasse, welche ein Kubikcentimeter ausfüllt, während in dem älteren Systeme die drei Urmaße sind: Sekunde, Meter und die Krafteinheit gleich der Schwere eines Kubikcentimeters Wasser.

Die neue Masseneinheit heißt ebenso wie die alte Kraft- oder Gewichtseinheit, nämlich Gramm (G).

Die Krafteinheit ist im CGS-Systeme eine abgeleitete Einheit, ebenso wie es im alten Systeme die Masseneinheit war. Sie wird dadurch erhalten, daß man jene Kraft 1 nennt, welche der Masseneinheit in einer Sekunde die Beschleunigung 1 Centimeter gibt, und von der Thatsache ausgeht, daß die Schwere eines Grammes der Masseneinheit G in einer Sekunde die Beschleunigung von g (= 981) Längeneinheiten gibt. Die neue Krafteinheit ist also $\frac{1}{g}\left(=\frac{1}{981}\right)$ der alten und führt den Namen Dyn. Eine Million Dyn, ein Megadyn genannt, ist demnach nahezu gleich der Schwere eines Kilogramms.

§ 104. Allgemeiner Ausdruck für die Beschleunigung.

Es soll nun ermittelt werden, welche Beschleunigung die Masse $M = \frac{Q}{g}$, d. h. die Masse vom Gewichte Q, durch die beliebige Kraft P erhält.

Gehen wir vom freien Falle aus, so erteilt

die Kraft Q der Masse $\frac{Q}{g}$ die Beschleunigung g

nach § 3 die Kraft 1 „ „ $\frac{Q}{g}$ „ „ $\frac{g}{Q}$

„ „ „ die Kraft P „ „ $\frac{Q}{g}$ „ „ $P \cdot \frac{g}{Q}$.

Bezeichnen wir allgemein die Beschleunigung mit a (acceleration), so ist

$$a = \frac{P}{Q} g.$$

Es ist also die Beschleunigung, welche die beliebige Masse vom Gewichte Q durch eine beliebige in Gewichtseinheiten ausgedrückte Kraft P erhält, $\frac{P}{Q}$ mal so groß als die Fallbeschleunigung g.

Diese Gleichung ist es, welche durch Einführung der obigen Masseneinheit von g Gramm Gewicht die einfachere Gestalt erhält

$$a = \frac{P}{M},$$

d. h. die Beschleunigung ist gleich dem Quotienten aus Kraft und Masse.

§ 105. **Einführung des allgemeinen Ausdruckes der Beschleunigung in die Gleichungen der gleichförmig beschleunigten Bewegung.**

Die in § 100 aufgestellten Gleichungen erhalten nun die Form

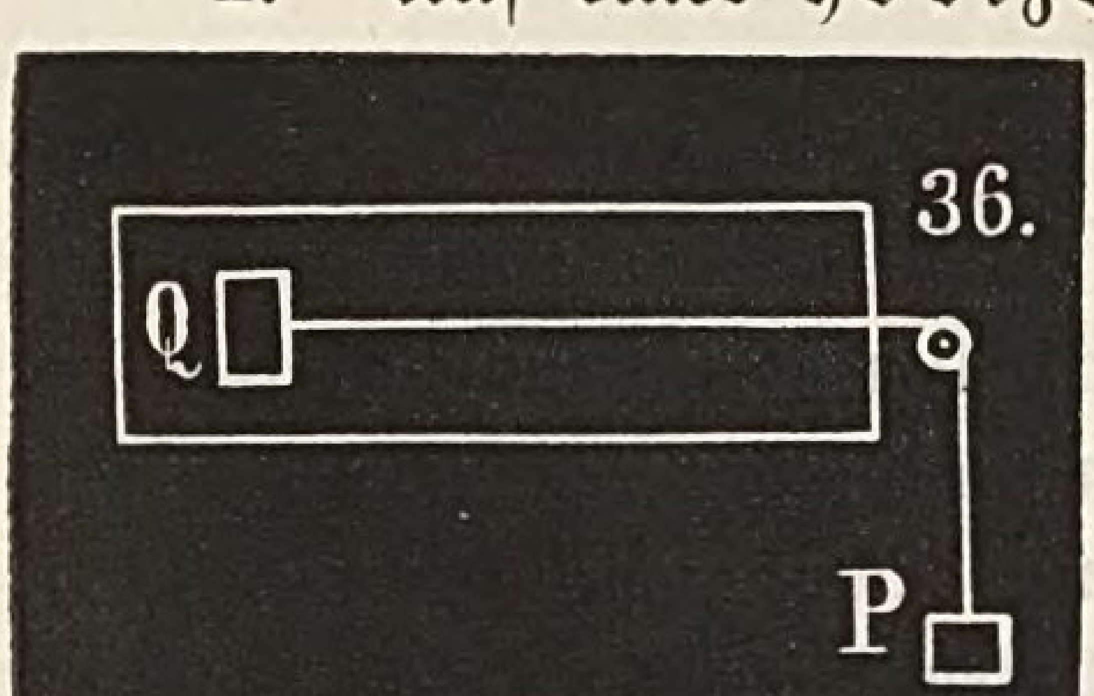
$$v = c + t \cdot \frac{P}{M},$$

$$s = tc + t^2 \frac{P}{2M};$$

dieselben werden indessen nur dadurch homogen (linear), daß dem Quotienten $\frac{P}{M} = g \frac{P}{Q}$ die Bedeutung einer Länge zuerkannt wird.

§ 106. Weitere Beispiele von geradliniger gleichförmig beschleunigter Bewegung.

I. Auf einer horizontalen glatten Ebene (Fig. 36) befinde sich ein schwerer Körper von Q Kilogramm; über eine leicht bewegliche Rolle sei ein gewichtsloser Faden, welcher das freihängende Gewicht P mit Q verbindet, so geführt, daß der Teil zwischen Rolle und Q stets horizontal bleibt. Denken wir uns den Wider-



stand der Reibung aufgehoben, so tritt Bewegung ein. Denn die an dem Gewichte Q thätige Schwerkraft und die ihr gleiche und entgegengesetzte Gegenwirkung der Unterlage geben keine Komponente in die Horizontale ab, so daß nur die Kraft in P allein übrig bleibt, die Massen von P und Q zusammen in Bewegung zu setzen. Die Beschleunigung ist

$$a = g \frac{P}{P + Q}; \text{ und } s = \tfrac{1}{2} g \frac{P}{P + Q} t^2.$$

Den Weg, welchen Q in einer gegebenen Zeit t zurücklegt, kann man der Beobachtung entnehmen und damit das Resultat der Rechnung vergleichen.

Um den eben erwähnten Versuch mit gutem Erfolge anzustellen, bedient man sich eines mittelst der Libelle horizontal gestellten Schienengeleises von c. 1 Meter Länge, auf welchem man einen Schlitten oder einen vierrädrigen Wagen laufen läßt, dessen Räder klein und leicht sind. Die durch gutes Einölen verminderte Reibung gleicht man dadurch aus, daß man zunächst statt des Gewichtes P soviel Gewicht anhängt, daß der Wagen nach einem leichten Anstoße seine Bewegung langsam und gleichmäßig fortsetzt. Diese Gewichte sind dann in die bewegte Masse einzurechnen. Will man eine gute Zeitmessung machen, so wird man ohne elektrische Hilfsmittel nicht wohl auskommen.

In Ermangelung eines feineren Reliefschreibers, dessen Genauigkeit, etwa auf $\frac{1}{30}$ Sekunde veranschlagt werden darf, genügt wohl auch ein gewöhnlicher Morse mit spitzem Stichel, der ein Zeichen macht, so oft ein vom Wagen aus nach außen reichender Stift eine der Quecksilberkuppen berührt, welche in gemessenen Entfernungen neben dem Geleise aufgestellt sind.

Sind zwei solche hinter einander liegende Entfernungen, jede von der Größe b, in den Zeiten t_1, t_2 zurückgelegt worden, so kann man aus den Gleichungen

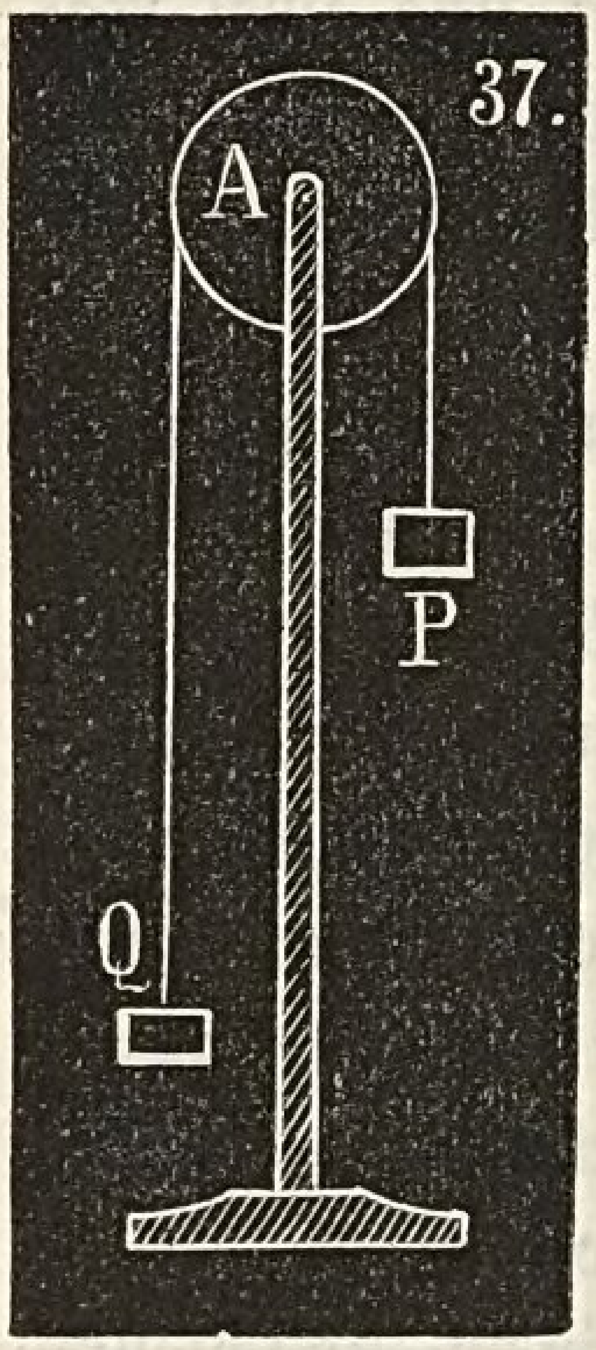
$$b = c t_1 + t_1^2 \frac{a}{2}$$

$$2b = c(t_1 + t_2) + (t_1 + t_2)^2 \frac{a}{2}$$

die unbekannte Anfangsgeschwindigkeit (c) eliminieren und a berechnen. Dieses a wird mit dem nach obiger Formel berechneten nahe übereinstimmen. Wiederholt man den Versuch mit einer andern Wagenladung, so muß die Reibung neuerdings ausgeglichen werden.

§ 107. II. Ueber eine leicht bewegliche vertikale Rolle in

A (Fig. 37) sei ein gewichtsloser Faden geführt, welcher an seinen Enden die Gewichte P und Q trage. Wenn kein Reibungs-Widerstand stattfindet, werden beide Gewichte nur dann in Ruhe bleiben, wenn P = Q ist; in jedem anderen Falle tritt Bewegung ein. Nehmen wir P > Q, so kann man sich vorstellen, daß das Uebergewicht (P—Q) als Kraft die Masse beider Gewichte und die Rolle in Bewegung zu setzen hat. Sieht man von der Rolle ab, so ist



$$a = g \cdot \frac{P - Q}{P + Q}$$

und somit der in der Zeit t zurückgelegte Weg

$$s = \tfrac{1}{2} g \frac{P - Q}{P + Q} t^2.$$

Die Apparate, welche nach dem in Fig. 37 angedeuteten Prinzip ausgeführt sind, eignen sich vorzüglich zur Erprobung der Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Sie sind unter dem Namen der Atwood'sche Fallmaschine bekannt.

Es darf indessen hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß diese Maschinen in der Regel mit unnötigem Beiwerke ausgestattet sind, während das, worauf es in erster Linie ankommt, vernachlässigt ist. Unnötig sind Friktionsrollen zur Verminderung der Reibung, da letztere bei Anwendung der kleinen Kräfte (P — Q = 1 gr u. dgl.) deren Wirkung hier verglichen wird, doch unbedingt ausgeglichen werden muß. Es genügt, die Rolle A in Körnerspitzen laufen zu lassen. Unnötig ist ferner eine besondere Vorrichtung zum Messen der Zeit, da hiezu ein Mälzel'sches Metronom (Taktmesser), welches billig zu haben und vielfach verwendbar ist, vollkommen ausreicht. Der Lehrer hält den aufwärts ziehenden Faden (Q) leicht zwischen 2 Fingern, markiert einige Sekunden hindurch für sich die Taktschläge (etwa 120 p. Minute) des Metronoms und läßt dann mit laut gesprochenem „Null" den Faden aus, um nun die halben Sekunden mitzuzählen, bis der Aufschlag des Laufgewichtes P erfolgt.

Wesentlich ist die Höhe des Ständers, die nicht wohl unter 2,5 Meter betragen soll, und die Einteilung in Decimeter und Centimeter, welche auf demselben weithin sichtbar etwa in der Weise angebracht ist, daß in einem Decimeter schwarze und weiße 1 Centimeter breite Horizontalstriche abwechseln, während im nächsten Decimeter die

der von der schiefen Ebene mit einem gleich großen entgegengesetzten Drucke erwidert wird. Diese Kräfte leisten nichts in der zu ihnen senkrechten Richtung AB, so daß in dieser Richtung die Komponente $AB = Q \sin \alpha$ allein den Punkt beschleunigt. Setzen wir in der allgemein giltigen Gleichung

$$a = \frac{P}{M}$$

$Q \sin \alpha$ an die Stelle von P und $\frac{Q}{g}$ an die Stelle von M, so erhalten wir

$$a = g \frac{Q \sin \alpha}{Q} = g \sin \alpha.$$

Die Beschleunigung ist demnach unabhängig vom Gewichte Q. Aus der Beschleunigung ergibt sich für die Bewegung von der Ruhe aus:

$$v = tg \sin \alpha,$$

$$s = t^2 \cdot \frac{g \sin \alpha}{2}.$$

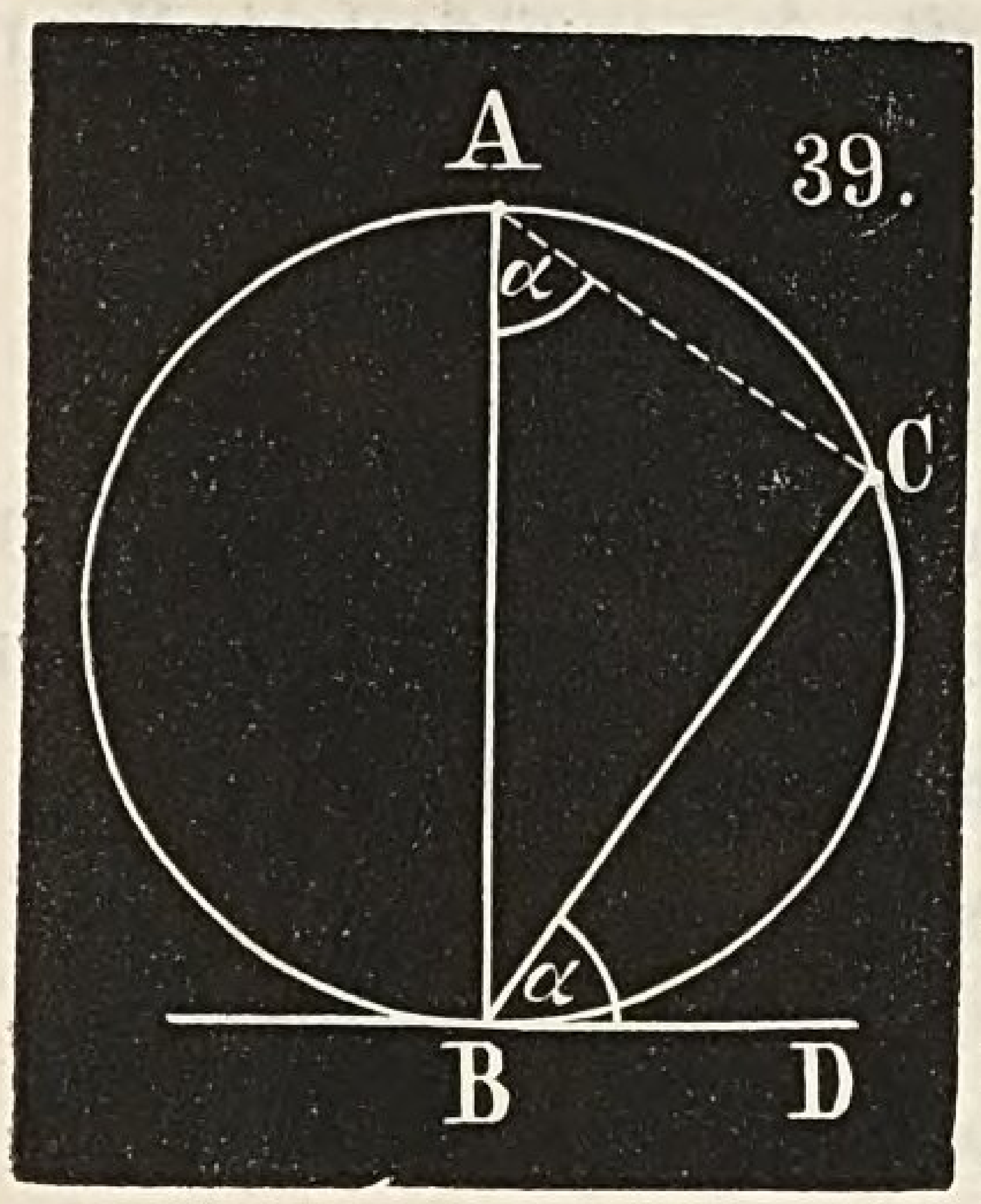
Denkt man sich, der Punkt befinde sich ursprünglich in L und durchlaufe die Strecke $s = LM$, so ist seine Endgeschwindigkeit in M von der Größe

$$\sqrt{2g\,LM \sin \alpha},$$

da aber $LM \sin \alpha = h$, so ergibt sich

$$v = \sqrt{2gh} \text{ d. h.}$$

die Endgeschwindigkeit ist nicht von der durchlaufenen Weg-Länge s, sondern nur von der Höhe h, der Vertikalprojektion dieser Länge, abhängig.



Zusatz zu § 108. Zieht man in einem vertikalen Kreise nach dem tiefsten Punkte B (Fig. 39) eine Sehne CB, welche mit der Tangente BD einen Winkel $= \alpha$ bildet, so kann man CB als schiefe Ebene und α als ihre Neigung betrachten. Ziehen wir noch den Durchmesser AB und die Sehne AC, so ist

$$\angle BAC = \angle CBD = \alpha \text{ und}$$
$$BC = AB \sin\alpha = 2r \sin\alpha.$$

Wir haben daher für einen Punkt, der die Sehne CB durchläuft,

$$2r \sin\alpha = \tfrac{1}{2} gt^2 \sin\alpha, \text{ oder}$$
$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$$

Der Punkt durchläuft somit jede Sehne in derselben Zeit.

§ 109. **Bewegung auf der schiefen Ebene mit Anfangsgeschwindigkeit.** Hat der Punkt während seiner Bewegung über die schiefe Ebene an einer Stelle, welche der Zeit t = o entspricht, die abwärts gerichtete Geschwindigkeit v_0, so haben wir als Ausdruck der Geschwindigkeit v und des von da an zurückgelegten Weges für eine beliebige Zeitdauer t beziehungsweise

$$(1) \quad v = v_0 + gt \sin\alpha, \text{ und}$$
$$(2) \quad s = v_0 t + \tfrac{1}{2} gt^2 \sin\alpha.$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit v_0 längs der schiefen Ebene aufwärts gerichtet, so haben wir

$$(3) \quad v = v_0 - gt \sin\alpha$$
$$(4) \quad s = v_0 t - \tfrac{1}{2} gt^2 \sin\alpha,$$ wobei s den schließlichen Abstand des Punktes von derjenigen Stelle bedeutet, von welcher er zur Zeit Null ausgegangen ist. Der Abstand ist längs der schiefen Ebene zu messen und positiv längs der schiefen Ebene aufwärts.

Der Punkt hört zu steigen auf, wenn v = o, oder was dasselbe ist, $gt \sin\alpha = v_0$ geworden ist; der zurückgelegte Weg beträgt für diesen Fall

$$s = \frac{v_0^2}{g \sin\alpha} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g \sin\alpha} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g \sin\alpha}.$$

Von da wird der Punkt rückläufig und kehrt in der gleichen Zeit zu seinem Ausgangspunkte zurück. Durch Elimination von t erhalten wir für beide Fälle beziehungsweise noch

$$(5) \quad v^2 = v_0^2 \pm 2sg \sin\alpha$$

oder wegen s. $\sin\alpha = h$ auch

$$(6) \quad v^2 = v_0^2 \pm 2gh.$$

§ 110. Bewegt sich ein Punkt über zwei zusammenhängende schiefe Ebenen von verschiedener Neigung $\alpha > \beta$, und ist v_0 die momentane Geschwindigkeit beim Uebergange von der ersten Ebene auf die zweite, so ist $\alpha - \beta$ der Neigungswinkel beider Ebenen gegen einander, $v_0 \cos(\alpha - \beta)$ die Komponente, welche mit der Richtung der zweiten Ebene zusammenfällt und somit auf die zweite Bewegung direkten Einfluß hat, während die senkrechte Komponente $v_0 \sin(\alpha - \beta)$ für die Bewegung auf der zweiten Ebene teilweise oder ganz verloren gehen kann, je nachdem der bei dem Übergange stattfindende Stoß elastisch oder vollständig unelastisch vor sich geht. Nehmen wir letzteres an und verstehen unter t die Dauer der Bewegung, welche auf der zweiten Ebene von der Länge s und der Neigung β stattfindet, so haben wir hiefür nach dem vorausgehenden § die Gleichungen

$$(1)\ v = v_0 \cos(\alpha - \beta) \pm gt \sin\beta,$$

$$(2)\ s = v_0 t \cos(\alpha - \beta) \pm \tfrac{1}{2}gt^2 \sin\beta,$$

$$(3)\ v^2 = v_0^2 \cos^2(\alpha - \beta) \pm 2sg \sin\beta,$$

je nachdem die Bewegung abwärts oder aufwärts gerichtet ist. Bei der aufwärts gehenden Bewegung ist $\alpha < \beta$ vorausgesetzt. Werden durch den Stoß elastische Kräfte erregt, oder haben die Winkel nicht das vorausgesetzte Größen-Verhältnis, so geht der mat. Punkt überhaupt nicht auf die zweite schiefe Ebene über.

§ 111. **Antrieb der Kraft und Quantität der Bewegung (Bewegungsgröße).** Durch die Gleichung

$$v = \frac{P}{M}t$$

ist zunächst die Geschwindigkeit dargestellt, welche die Masse M dadurch erhält, daß die Kraft P die Zeit t hindurch beschleunigend auf sie einwirkt. Dabei ist selbstverständlich P als die einzige Kraft gedacht, welche an der Masse M angreift.

Schreibt man die Gleichung in der Form

$$Pt = Mv,$$

so heißt das links stehende Produkt „der Antrieb der Kraft“, das rechts stehende „die Quantität der Beweg-

ung" oder die Bewegungsgröße der Masse M, und es kommt der Gleichung eine doppelte Bedeutung zu, je nachdem man 1) wie bisher, die Geschwindigkeit v der Masse M als ein Resultat der Thätigkeit der Kraft denkt, oder 2) sich vorstellt, die Masse M besitze mit dem Beginne der Zeit t bereits die Geschwindigkeit v und treffe damit auf einen Widerstand (Gegendruck) von der Größe P, den sie nun während der Zeit t überwindet, indem sie selbst dabei ihre Geschwindigkeit verliert.

Diese zweite Auffassung, zu welcher das freie senkrechte Aufsteigen der Körper § 102 ein Beispiel gibt, belehrt uns, daß ein Körper durch Aufwenden oder Darangeben seiner Bewegungsgröße eine gewisse Zeit t hindurch einen konstanten Druck P ausüben kann, durch welchen wiederum andere Moleküle oder Systeme von Molekülen in Bewegung gesetzt oder beschleunigt werden können.

Hatte der Körper, als die Kraft P zu wirken begann ($t = o$), bereits die Geschwindigkeit v_0, die bis zum Ende der Zeit t auf v anwächst, oder hat er 2) nachdem er die Anfangsgeschwindigkeit v besessen und t Sekunden lang auf einen anderen Körper mit der Kraft P eingewirkt hat, noch die Geschwindigkeit v_0, so ist der Antrieb der Kraft

$$Pt = M\,(v - v_0).$$

§ 112. **Der unelastische Stoß.** Wird ein Körper von der Masse M_1 und der Geschwindigkeit v_1 von einem zweiten Körper, dessen Masse M_2 und dessen Geschwindigkeit v_2 ist, eingeholt, so folgt auf den Moment der ersten Berührung eine Zeit (t) der gegenseitigen Einwirkung beider Massen (Druck und Gegendruck), bis die Geschwindigkeiten sich ausgeglichen haben. Der Druck $+ P$, mit welchem der einholende Körper auf den langsameren wirkt, vermehrt die Geschwindigkeit des letzteren, während der gleich große entgegengesetzte Druck $- P$, mit welchem der langsamere Körper gegen den nachdrängenden reagiert, letzterem Geschwindigkeit entzieht.

Thatsächlich wird sich dieser Ausgleich in einer Reihe kleiner Zeitintervalle vollziehen, in welchen die Kraft P verschiedene

Werte hat; aber es ist erlaubt, bezüglich des Schlußresultates diese verschiedenen Antriebe durch einen mittleren (Pt) zu ersetzen. Bezeichnet man mit v die endliche beiden Körpern gemeinsame Geschwindigkeit, so ist bezüglich des eingeholten Körpers

$$Pt = M_1 (v - v_1)$$

und bezüglich des einholenden

$$-Pt = M_2 (v - v_2)$$

woraus sich berechnet

$$v = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2}.$$

Die resultierende Geschwindigkeit kann Null werden, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten einander entgegengesetzt sind:

$$v_1 = -\frac{M_2}{M_1} v_2$$

Die berechneten Resultate können mit Kugeln von feuchtem Thon, welche man um einen festen (vertikalen) Durchmesser von Draht und zwei kleine Polschalen formiert hat, nachgewiesen werden. Die Kugeln werden an Fäden von 70—100 cm Länge neben einander aufgehängt...

§ 113. **Arbeit. Lebendige Kraft.** Eliminiert man aus den beiden Gleichungen $v = \frac{P}{M}t$ und $s = \frac{P}{2M}t^2$ die Zeit t, so erhält man eine Gleichung zwischen P, M, v, s, welche auf die Form

$$Ps = \tfrac{1}{2} Mv^2$$

gebracht werden kann. Das auf der linken Seite stehende Produkt Ps aus der Kraft (P) in den Weg (s) ihres Angriffspunktes heißt die Arbeit der Kraft. Der rechts stehende Ausdruck heißt die lebendige Kraft der Masse (M) oder auch die kinetische Energie derselben.

Auch diese Gleichung läßt zwei Auslegungen zu, je nachdem man sich die Masse ursprünglich in Ruhe und ihre Endgeschwindigkeit als die Wirkung der auf der Strecke s an der Masse thätigen Kraft P betrachtet oder

indem man sich die Masse M im ursprünglichen Besitze der Geschwindigkeit v (oder, was dasselbe ist, der lebendigen Kraft $\frac{1}{2}Mv^2$) denkt und annimmt, daß sie diese lebendige Kraft zur Leistung der äquivalenten Arbeit Ps aufwendet.

$Ps = \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2$ mit ihrer doppelten Auslegung heißt das Gesetz von der Erhaltung der lebendigen Kraft. Dasselbe kann in folgender Weise formuliert werden:

Bei dem Verschwinden einer lebendigen Kraft wird eine Arbeit von solcher Größe geleistet, daß die verschwundene lebendige Kraft durch diese Arbeitsgröße wieder erzeugt werden könnte.

§ 114. **Maß der Arbeit und der Leistungsfähigkeit.** Die Einheit der Arbeit wird geleistet, wenn die Krafteinheit auf eine Längeneinheit hin thätig ist. In der Technik bildet man die Arbeitseinheit, indem man das Kilogramm als Krafteinheit mit dem Meter als Längeneinheit verbindet und die Arbeit, welche verrichtet wird, wenn ein Druck oder Zug gleich der Schwere eines Kilogrammes auf ein Meter hin ausgeübt wird, ein Meterkilogramm (Kilogrammmeter) nennt. Wird z. B. ein Kilogramm ein Meter hoch gehoben, so wird 1 mk Arbeit verrichtet.

Bei dem Maße einer Arbeit kommt die Zeit, welche bei Verrichtung derselben vergeht, nicht in Betracht. Wird diese Zeit in Rechnung gebracht, so ändert sich der Gesichtspunkt wesentlich, und es entsteht der Begriff der Leistungsfähigkeit in Bezug auf den Motor, welchem man die Leistung der Arbeit zuschreibt. Als Einheit der Leistungsfähigkeit dient die Pferdekraft (Pferdestärke HP), welche eine Arbeit von 75 mk per Sekunde leistet. Man sagt von einer Maschine, „sie arbeitet mit 5 Pferdekräften (5 HP)", wenn sie 5·75 mk per Sekunde leistet, und „sie ist eine Maschine von n HP", wenn sie n·75 mk per Sekunde leisten kann.

§ 115. **Das Prinzip von der Erhaltung der Kraft.** Nicht immer besteht der Erfolg einer Arbeit in der Vermehrung der lebendigen Kraft einer Masse. Auch kann man fragen, welches greifbare Resultat von derjenigen Arbeit zurückbleibt, welche durch das Verschwinden oder Abnehmen einer lebendigen Kraft geleistet wird. So wird z. B. das Gewicht Q auf die Höhe h gehoben und dort gehalten oder unterstützt. Die auf-

erfolgen muß, welche mit der Richtung der bereits vorhandenen Geschwindigkeit einen von 0^0 und 180^0 verschiedenen Winkel bildet. Es kommt also die krummlinige Bewegung dadurch zustande, daß der materielle Punkt zu seiner eigenen Geschwindigkeit fortwährend neue von seiner Richtung abweichende Geschwindigkeiten erhält.

§ 118. **Grundsatz. (Parallelogramm der Geschwindigkeiten).** Besitzt ein materieller Punkt gleichzeitig zwei Geschwindigkeiten v_1, v_2 von verschiedenen Richtungen, so befindet er sich t Sekunden nachher an derselben Stelle, an welche er kommt, wenn er sich t Sekunden lang nur mit der einen Geschwindigkeit (v_1) und hierauf t Sekunden lang mit der zweiten Geschwindigkeit (v_2) bewegt.

Der materielle Punkt befindet sich demnach in dem Endpunkte der Diagonale des Parallelogramms, welches aus den beiden Geschwindigkeiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel konstruiert werden kann.

Konstruiert man nach diesem Prinzip den Ort des materiellen Punktes für beliebige Zeitmomente, so erkennt man, daß die Diagonale auch die thatsächliche Bahn des materiellen Punktes ist; denn er kann sich zu keiner Zeit außerhalb dieser Linie befinden.

Zusatz 1. Zum Zwecke der Untersuchung ist es erlaubt, die Geschwindigkeit (v) eines materiellen Punktes in zwei Seitengeschwindigkeiten (v_1, v_2) (Komponenten) zu zerlegen, welche von der Richtung der Geschwindigkeit v um die Winkel β und γ nach verschiedenen Seiten hin abweichen, wenn nur die Gleichung erfüllt ist

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos (\beta + \gamma).$$

Zusatz 2. Auch die Natur zerlegt die Geschwindigkeit eines Körpers, der in seiner Bahn auf ein Hindernis z. B. auf die Grenzfläche eines Körpers von unendlich großer Masse trifft, in zwei Komponenten, von welchen die eine normal, die andere tangential zur getroffenen Fläche ist. Die normale Komponente

wirkt auf das Hindernis, dessen Gegenwirkung im allgemeinen eine der Komponente entgegengesetzte Geschwindigkeit sein wird, welche sich mit der tangentialen Komponente zu einer resultierenden Geschwindigkeit verbindet. Mit dieser geht dann der Körper von dem Hindernis ab.

§ 119. **Ballistik.** Unter einem Wurf versteht man eine Bewegung, welche ein Körper unter dem gleichzeitigen Einflusse einer ursprünglichen Geschwindigkeit und der Schwerkraft ausführt. Demgemäß sind die besonders einfachen Fälle des vertikalen oder lotrechten Wurfes bereits als Beispiele der geradlinigen gleichförmig beschleunigten Bewegung behandelt, und es bleibt noch der Fall übrig, wo die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit der Richtung der Schwere einen von 0^0 und 180^0 verschiedenen Winkel (α) bildet.

Zerlegt man v_0 in zwei Komponenten, eine horizontale $v_0 \cos \alpha$ und eine vertikale $v_0 \sin \alpha$, so bleibt jene, da ihre Richtung senkrecht auf der Richtung der Kraft steht, unverändertes Eigentum des Körpers, während sich zu der vertikalen Komponente die von der Schwere erzeugten Geschwindigkeiten gesellen.

Nach Verlauf der Zeit t hat demnach der Körper in der Vertikalen die Geschwindigkeit

$$v_y = v_0 \sin \alpha - tg, \ldots (1)$$

in der Horizontalen $v_x = v_0 \cos \alpha \ldots\ldots (2)$

Da ferner der Körper horizontale Strecken nur vermöge seiner Horizontalgeschwindigkeit zurücklegt, so ist seine Abscisse $x = AN$ (Fig. 40) nach Verlauf der Zeit t

$$x = t v_0 \cos \alpha \ldots (3)$$

Die Ordinate $y = JN$ muß ebenso groß sein, wie wenn der Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \sin \alpha$ vertikal aufsteigen würde, nämlich

$$y = t v_0 \sin \alpha - t^2 \frac{g}{2}, \ldots (4)$$

denn die Horizontalgeschwindigkeit kann hier nichts beitragen.

Durch diese zwei Gleichungen ist die Stelle J, sowie jede andere, welche einer gegebenen Zeit t entspricht, vollkommen bestimmt. Durch Elimination von t erhalten wir als Gleichung der Bahn

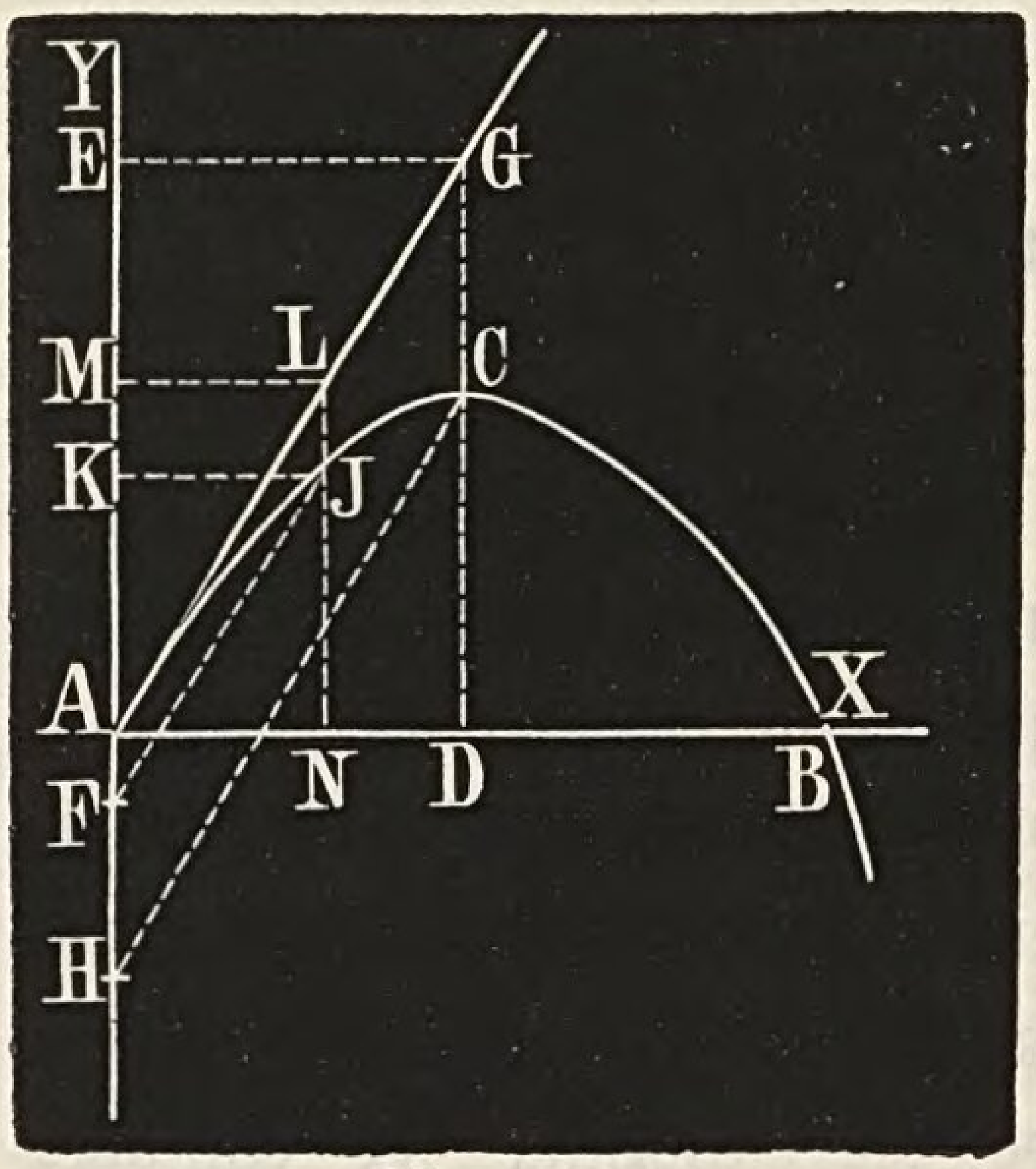


Fig. 40.

$$y^{*)} = x \tan g\,\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 \ldots (5)$$

Die Bahngeschwindigkeit v läßt sich aus den zwei rechtwinkeligen zu AY und AX parallelen Seitengeschwindigkeiten, als Resultante berechnen: Man findet aus (1) und (2)

$$v^2 = v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0\,gt \sin\alpha,$$

oder wegen $gt^2 - 2v_0\,t \sin\alpha = -2y$ aus (4)

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy} \ldots (6)$$

woraus sich der absolute Wert von v berechnen läßt. Die Richtung von v ergibt sich aus $\sin\varepsilon = \frac{v_y}{v}$, wenn ε den Winkel des v mit der Abscissenachse bezeichnet.

Der Punkt wird zu steigen aufhören, wenn die Geschwindigkeit v_y Null ist; also wenn

$$v_0 \sin\alpha - gt = o, \text{ oder wenn } t = \frac{v_0}{g}\sin\alpha \text{ ist.}$$

Für die größte Höhe CD = h als Wurfhöhe erhalten wir demnach aus (4)

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha \ldots (7)$$

Ist der Punkt in B, d. h. im Horizont AX angelangt, so ist y = o; mithin folgt aus (5) die Wurfweite

$$w = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \ldots (8)$$

---

*) Die durch diese Gleichung dargestellte Kurve führt den Namen Parabel.

neuen Geschwindigkeit mit BE ein Parallelogramm gibt, welches BF zur Diagonale hat.

Somit muß die in B hinzukommende Geschwindigkeit v dem EF parallel und $\frac{v}{n} = EF$ sein. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß BH = EF den Winkel ABF der gleichen Sehnen AB und BF halbiert und folglich nach dem Mittelpunkte M des Kreises gerichtet ist. Die Geschwindigkeit v ist also centripetal.

Ihre Größe läßt sich berechnen, wenn man BH bis M verlängert und FM zieht. Denn aus der Ähnlichkeit der gleichschenkligen Dreiecke BHF und BFM ergibt sich

$$BH : BF = BF : FM$$

oder

$$\frac{v}{n} \cdot r = \left(\frac{c}{n}\right)^2.$$

Daraus folgt $v = \frac{c^2}{nr}$.

Eine centripetale Geschwindigkeit von dieser Größe muß an jedem Eckpunkte wie B, F . . . hinzukommen, wenn der materielle Punkt seine Bewegung durch das eingeschriebene Polygon fortsetzen soll. Eine Kraft, welche diese Geschwindigkeit hervorbringen soll, muß n mal in der Sekunde die Geschwindigkeit v, also in Summa die Geschwindigkeit nv erzeugen. Dieses $nv = \frac{c^2}{r}$ ist somit die Beschleunigung, welche die Kraft dem materiellen Punkte erteilt.

Die Beschleunigung $\frac{c^2}{r}$ heißt von ihrer Richtung Centripetalbeschleunigung.

Die Bedingungen, unter denen ein materieller Punkt mit konstanter Geschwindigkeit (c) Sehnen eines Kreises vom Radius r durchläuft, lassen sich demnach dahin zusammenfassen: der materielle Punkt muß eine Centripetalbeschleunigung von der Größe $\frac{c^2}{r}$ erhalten, welche ihm an den Ecken des durchlaufenen Poly-

geneinheiten einen Grad vorstellen. Der Winkel hat dann den mit dem Radius 1 um seinen Scheitel beschriebenen Bogen zum Maß. Ist in diesem Maße ω die Winkelgeschwindigkeit eines rotierenden Körpers, so ist $r\omega$ die lineare Geschwindigkeit derjenigen materiellen Punkte, welche sich in der Entfernung r von der Rotationsachse befinden.

Die im vorigen § aufgestellte Formel der Centripetalkraft bezieht sich auf eine in der Entfernung r befindliche Masse M, welche die lineare Geschwindigkeit c besitzt. Führt man die Winkelgeschwindigkeit ein, indem man $c = r\omega$ setzt, so wird

$$P = Mr\omega^2.$$

§ 122. **Beschleunigung der Rotation eines starren Systems materieller Punkte.** Es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen ein Körper, welcher bereits mit der Winkelgeschwindigkeit a rotiert, innerhalb einer Sekunde einen Zuwachs an Winkelgeschwindigkeit von der Größe Θ erhält.

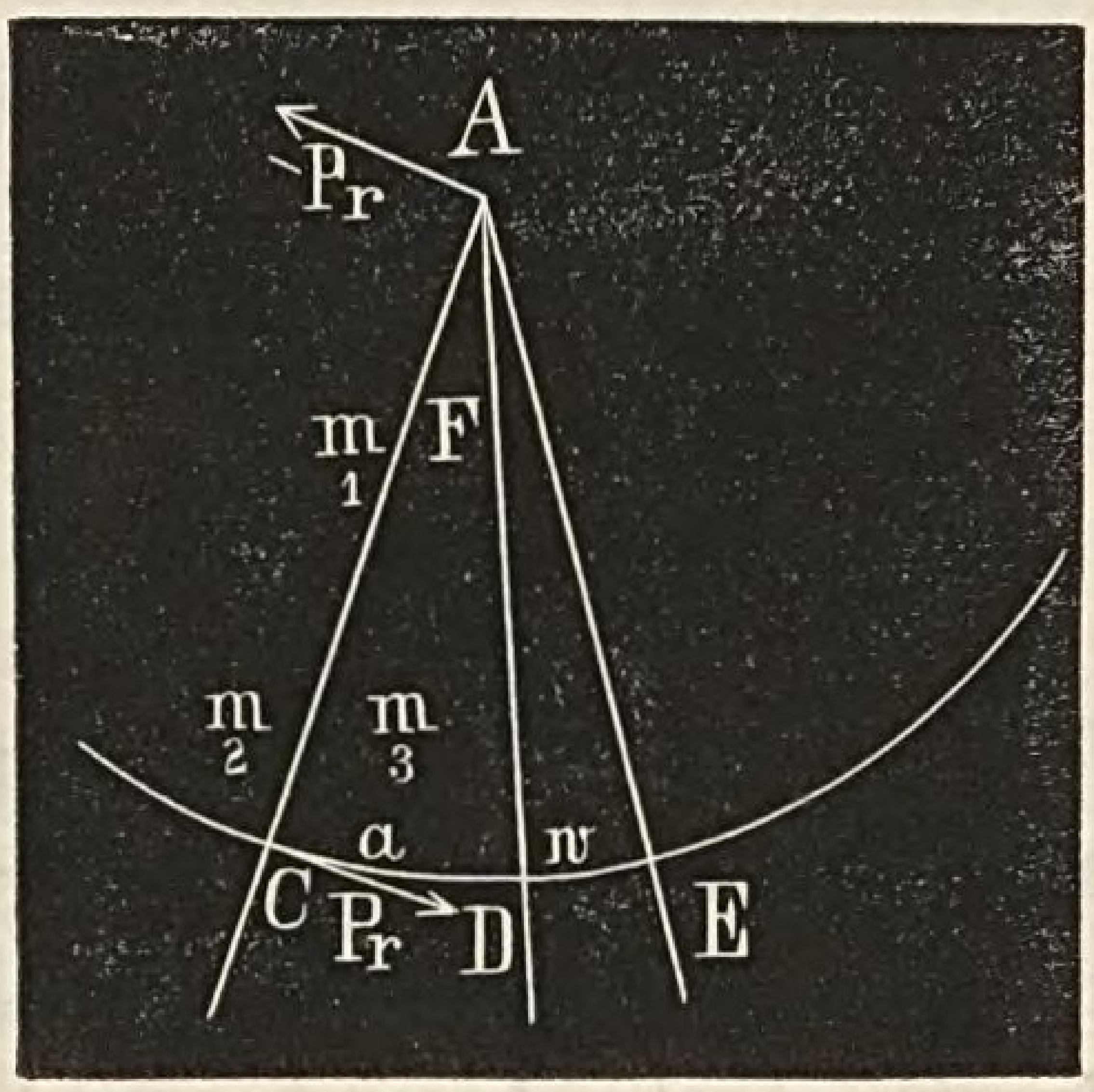


Fig. 42.

Sei A (Fig. 42) die zur Ebene der Figur senkrechte Drehungsachse und Pr das Moment des resultierenden Kräftepaares, welches an dem rotierenden Körper thätig ist. Letzteres läßt sich denken als ein Kräftepaar, welches die Kräfte (+ Pr), (— Pr) und den Arm AC = 1 besitzt. Hat das System unter der Einwirkung dieser Kräfte eine Sekunde lang seine Drehung fortgesetzt, so ist erstlich der Winkel a = CD zurückgelegt und außerdem noch, wie wir annehmen ein Winkel w = DE vermöge der beschleunigenden Thätigkeit der Kräfte, und die Winkelgeschwindigkeit sei schließlich $a + \Theta$.

Die Arbeit der Kraft (— Pr) ist während dieser Bewegung Null, da ihr Angriffspunkt einen Weg nicht zurücklegt. Die Arbeit der Kraft Pr ist $Pr \cdot CE = Pr\,(a + w)$.

Setzt man $w = \frac{\Theta}{2}$, so wird $Pr = \Theta \Sigma (m x^2)$ oder

$$\Theta = \frac{Pr}{\Sigma (m x^2)}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem in § 104 für die Beschleunigung einer fortschreitenden Bewegung gefundenen, so findet man, daß bei der Rotation das Moment des resultierenden Kräftepaares die Stelle der Kraft und das Trägheitsmoment die Stelle der Masse vertritt.

$\Theta = \frac{Pr}{\Sigma (m x^2)}$ ist die Zunahme, welche die lineare Geschwindigkeit des in der Entfernung 1 von der Drehungsachse befindlichen Punktes in einer Sekunde erfährt, wenn ein Kräftepaar von dem Momente Pr an einem Körper dreht, dessen Trägheitsmoment $\Sigma (m x^2)$ ist.

§ 123. **Die Keppler'schen Gesetze.** Die von Keppler (1609—1619) aus seinen eigenen und Tycho Brahe's Beobachtungen abgeleiteten und nach ihm benannten drei Gesetze der Planetenbewegung lauten:

1) Alle Planeten bewegen sich in Ebenen um die Sonne; ihre Bahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne sich befindet;
2) die vom Planeten nach der Sonne gezogene Gerade (radius vector) beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Sektoren);
3) die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Entfernungen von der Sonne.

Diese Gesetze bilden die empirische Grundlage, auf welcher Newton (1686) das von ihm entdeckte Gravitationsgesetz aufstellen konnte. Der Zusammenhang soll hier dargelegt werden:

a) Mit Hilfe des ersten und zweiten Gesetzes läßt sich nachweisen, daß die Planeten nach der Sonne hin Centripetalbeschleunigungen erfahren.

sten Punkte B der Bahn, letztere dem Punkte M selbst angehört: NM = AD — AE.

Von hier an sind unsere Bemühungen darauf gerichtet, einen genäherten*) Ausdruck für die Schwingungsdauer d. h. für die Zeit zu finden, welche das Pendel zu einer Schwingung (BAC) nötig hat.

Zu diesem Zwecke setzen wir so kleine Elongationswinkel (α) voraus, daß die Winkel selbst an die Stelle ihrer Sinus und somit die Cosinus gleich Eins gesetzt werden dürfen.

Um die Winkel in den Ausdruck für die Geschwindigkeit einzuführen, beachten wir, daß

$$AD = \frac{\overline{AB}^2}{2\,l}, \qquad AE = \frac{\overline{AM}^2}{2\,l}$$

und $AM = 2\,l \sin\frac{\varphi}{2}$, $AB = 2\,l \sin\frac{\alpha}{2}$, wie man nach Vervollständigung des Kreises leicht findet.

Somit ist die Geschwindigkeit im Punkte M genau:

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}\left(\overline{AB}^2 - \overline{AM}^2\right)} = AB\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1 - \frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

und wenn man näherungsweise die Winkel statt der sinus und $\cos\frac{\alpha}{2} = 1$ setzt:

$$v = BD\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{\alpha^2}}.$$

Man kann nun über der horizontalen Sehne BC einen Halbkreis beschreiben und verlangen, daß ein Punkt P, welcher diesen Halbkreis mit konstanter Geschwindigkeit c durchläuft, gleichzeitig mit dem Pendel in C ankomme. Das würde jedenfalls geschehen, wenn wir die mittlere Geschwindigkeit, welche

---

*) Eine geschlossene Formel existiert nicht; die zur Entwickelung der unendlichen Reihe nötigen mathematischen Vorkenntnisse werden hier nicht vorausgesetzt.

das Pendel während einer Schwingungsdauer besitzt, in dem Verhältnis vergrößern, als der Weg durch den Halbkreis länger ist als der Weg durch den Bogen BAC. Da uns aber die mittlere Geschwindigkeit des Pendels unbekannt ist, so sind wir auf eine andere Methode zur Bestimmung von c angewiesen.

Denkt man sich den Halbkreis in n (eine große Anzahl) gleiche Teile geteilt und durch jeden Teilpunkt eine Vertikale gelegt, so gelangt der Punkt P von jeder dieser Vertikalen zur folgenden in der gleichen Zeit $\left(\frac{t}{n}\right)$. Er legt aber diese Abstände, deren Summe die Sehne BC ist, nur zurück vermöge der Horizontalkomponente seiner Geschwindigkeit. (Die Vertikalkomponenten sind für den Zweck, von B nach C zu kommen, nutzlos.) — Jeder von B nach C in irgend einer Kurve gehende Punkt kommt demnach mit P gleichzeitig an, wenn seine Geschwindigkeit in jeder Vertikalen die gleiche Horizontalkomponente hat.

Dieses gilt auch für das Pendel, dessen Geschwindigkeit in A ($\varphi = o$) die Größe BD $\sqrt{\frac{g}{l}}$ hat und horizontal gerichtet ist. Soll nun die Horizontalgeschwindigkeit des Punktes P überall, in jeder Vertikalen, der Horizontalgeschwindigkeit des Pendels gleich sein, so muß sie in K die Größe BD $\sqrt{\frac{g}{l}}$ haben, und da die Geschwindigkeit von P überhaupt konstant sein soll, so ist auch

$$c = \mathrm{BD}\sqrt{\frac{g}{l}},$$

und es fragt sich nur noch, ob auch in den übrigen Vertikalen die Horizontalkomponente c_x von c mit der Horizontalkomponente v_x von v übereinstimmt.

In der Vertikalen PN ist $v_x = v \cos \varphi$, oder, da wir $\cos \varphi = 1$ setzen, $v_x = v$, d. h.

$$v_x = \mathrm{BD}\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{\alpha^2}},$$

beobachteten Schwingungen abgeleiteten Schwingungsdauer und der aus der Formel berechneten.

Zusatz 2. Ein Pendel, welches in jeder Sekunde eine Schwingung macht, heißt Sekundenpendel. Seine Länge ist nur durch die Beschleunigung (g) der Schwere bestimmt und dieser proportional. Feine, mit allen Hilfsmitteln der physikalischen Technik und Wissenschaft ausgeführte und berechnete Pendelbeobachtungen gelten für das beste Mittel zur genauen Bestimmung des Wertes von g. Werden solche am Äquator und an verschiedenen anderen Örtern von bekannter geographischer Breite ausgeführt, so erhält man verschiedene Werte von g, welche mit der geographischen Breite wachsen. Ein Grund dieser Veränderlichkeit liegt in der Veränderlichkeit der Schwungkraft, welche am Äquator einen größeren Bruchteil der Schwere als Centripetalkraft in Anspruch nimmt als in größeren Breiten und an den Polen Null ist.

Vermehrt man die beobachteten g um die mit Hilfe der Formel des § 120 berechenbaren Werte der Centripetalbeschleunigung, so bleiben dennoch erhebliche Differenzen bestehen, welche aus der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt erklärt werden müssen und zur Feststellung der wirklichen Gestalt der Erde verwendet werden können.

Drittes Kapitel.

Von der Reibung.

§ 127. Gleitende Reibung findet statt, wenn zwei Körper von verschiedener Geschwindigkeit sich in einer Fläche berühren. Während der Berührung erfolgt ebenso wie beim unelastischen Stoße eine gegenseitige Einwirkung der Körper, durch welche die Differenz ihrer Geschwindigkeiten vermindert wird. (Grundgesetz der Reibung.)

Reiben sich zwei Körper an einander, welche den Antrieben, die sie von der Reibung erhalten, frei folgen können, da ihre Geschwindigkeiten gleichzeitig von anderen Kräften nicht beeinflußt werden, und sind die Geschwindigkeiten beider Körper von

gleicher Richtung, so besteht die Wirkung der Reibung darin, daß die größere Geschwindigkeit vermindert und die kleinere vergrößert wird. Diese Veränderungen geschehen nach demselben Gesetze, nach welchem die Wirkung des unelastischen Stoßes erfolgt, nämlich so, daß der langsamere Körper an Quantität der Bewegung (mv) gewinnt, was der geschwindere verliert, während gleichzeitig eine berechenbare Menge von lebendiger Kraft in Wärme umgesetzt wird.

Sind die Geschwindigkeiten der Körper von entgegengesetzter Richtung, so gilt das eben ausgesprochene Gesetz noch mit denselben Worten, wenn man den Geschwindigkeiten entgegengesetzte Vorzeichen beilegt und die Abnahme des absoluten Wertes der negativen Geschwindigkeit als ein Wachsen dieser Geschwindigkeit auffasst, wie solches der analytischen Methode entspricht.

Häufig ist der eine der beiden sich reibenden Körper mit dem Erdkörper so fest verbunden, daß die Kraft der Reibung nicht ausreicht, diese Kohäsion zu überwinden. Dann verschwindet die dem Erdkörper durch Reibung mitgeteilte Quantität der Bewegung für die Wahrnehmung, und es gewinnt den Anschein, als ob die ganze Wirkung der Reibung nur in einer Verzögerung des an der Erdoberfläche sich bewegenden Körpers bestehe.

§ 128. Um die Gesetze zu ermitteln, durch welche die Größe der gleitenden Reibung bestimmt ist, kann man sich eines Apparates bedienen, welcher dem in Fig. 36 abgebildeten ähnlich ist.

Ist die ebene Unterlage mit Hilfe der Libelle genau horizontal gestellt, und man erteilt dem darauf liegenden Körper, der ein Schlitten oder auch nur ein unten eben zugerichteter Klotz sein kann, in horizontaler Richtung einen Stoß, so ist es allein die Reibung, welche bewirkt, daß der Körper nach Zurücklegung einer kurzen Wegstrecke wieder zur Ruhe kommt, und es wird gelingen, das Gewicht P so zu regulieren, daß der Körper nach einem leichten Anstoß oder einer Erschütterung der

Unterlage eine erhebliche Strecke mit sehr kleiner, merklich konstanter Geschwindigkeit zurücklegt. Das Gewicht Q des Körpers stellt dabei den (einseitigen) Druck dar, mit welchem die sich reibenden Flächen während der Bewegung an einander gedrückt werden. Die Unterlage leistet einen Gegendruck von gleicher Größe. Von diesem Drucke zeigt sich die Reibung wesentlich abhängig. Vergrößert man denselben dadurch, daß man weitere Gewichte auf den Körper Q auflegt, so wächst auch die Kraft R, welche zur Überwindung der Reibung nötig ist, proportional der Größe des Reibungsdruckes (Q), und man hat als

Erstes Gesetz der Reibung

$$R = fQ,$$

d. h. die Kraft der Reibung ist dem Reibungsdrucke proportional.

Der Faktor f, welcher die Reibung für den Fall darstellt, daß der Reibungsdruck gleich der Gewichtseinheit ist, ist nur so lange konstant, als die beiden sich reibenden Flächen dieselben bleiben und führt den Namen Reibungskoeffizient.

§ 129. **Zweites Gesetz der Reibung.** Legt man den Körper vom Gewichte Q auf eine zweite an demselben befindliche ebene Fläche, welche genau ebenso zugerichtet ist wie die erste, aber größer oder kleiner ist wie diese, so ist die Reibung ebenso groß wie im ersten Falle: die Größe der sich reibenden Flächen hat keinen Einfluß auf die Größe der Reibung.

Man kann dieses Gesetz auch theoretisch aus dem ersten ableiten. Würde man zwei vollkommen identische Körper, deren jeder das Gewicht Q und die Reibungsfläche a hat, neben einander auf derselben Ebene gleiten lassen, so würde auch für beide die Reibung gleich sein und für jeden den Wert fQ haben. Für beide zusammen hat somit die Reibung die Größe 2 fQ. Diese Größe muß sie auch behalten, wenn man die beiden Körper dadurch zu einem Körper von der Reibungsfläche 2 a verbindet, daß man sie etwa mit zwei Seitenflächen zusammenkittet. Dieser kombinierte Körper hat nun das Ge-

wicht 2Q, und seine Reibung wäre nach dem ersten Gesetze f. 2Q, wenn die Reibungsfläche noch a wäre. Da sie denselben Wert auch jetzt hat, wo die Reibungsfläche 2a ist, folgt, daß letztere ohne Einfluß auf den Wert der Reibung ist.

Zusatz. Andere Fassung der Reibungsgesetze. Versteht man unter der Intensität des Reibungsdruckes den durchschnittlich auf die Flächeneinheit wirkenden Druck $\left(\frac{Q}{a}\right)$, so kann man auch sagen: die Reibung ist der Intensität des Reibungsdruckes und der Größe (a) der sich reibenden Fläche proportional. Denn $f\left(\frac{Q}{a}\right)\cdot a = fQ$.

§ 130. **Der Reibungswinkel.** Für einen auf der schiefen Ebene vom Neigungswinkel ε liegenden Körper vom Gewichte Q ist der Reibungsdruck $Q \cos \varepsilon$ und die Reibung $fQ \cos \varepsilon$, während die längs der schiefen Ebene abwärts beschleunigende Kraft $Q \sin \varepsilon$ ist. Eine längs dieser schiefen Ebene abwärts gerichtete Geschwindigkeit bleibt somit konstant, wenn

$$Q \sin \varepsilon = fQ \cos \varepsilon$$

oder

$$\tang \varepsilon = f,$$

d. h. wenn die Tangente ihres Neigungswinkels gleich dem Reibungskoeffizienten ist.

Durch diese Beziehung veranlaßt, setzt man auch allgemein

$$f = \tang \varphi$$

und nennt φ den Reibungswinkel. Der Reibungswinkel ist demnach definiert als derjenige Winkel, dessen Tangente gleich dem Reibungskoeffizienten ist.

Als eine erste Eigenschaft des Reibungswinkels (φ) ist die erkannt, daß er als Elevationswinkel der schiefen Ebene, die den Reibungskoeffizienten $\tang \varphi$ gegenüber einem auf ihr abwärts gleitenden Körper besitzt, Gleichgewicht herstellt zwischen der Reibung und der Schwere.

§ 131. Eine **zweite wichtige Eigenschaft des Reibungswinkels** ist die, daß er der vorteilhafteste Winkel ist, unter

welchem man eine Kraft, die einen Körper auf horizontaler oder schiefer Ebene bewegen soll, von dieser Ebene abgehen läßt.

Beweis. Nach § 93 gibt eine Kraft P, deren Richtung um einen Winkel α von einer schiefen Ebene (vom Elevationswinkel ε) abgeht in die zur Ebene senkrechte Richtung die Komponente $P \sin \alpha$, in die parallele Richtung die Komponente $P \cos \alpha$ ab, so daß die Reibung den Wert hat

$$R = f\,(Q \cos \varepsilon - P \sin \alpha),$$

und die Resultante S längs der schiefen Ebene aufwärts ist

$$S = P \cos \alpha - Q \sin \varepsilon - f\,(Q \cos \varepsilon - P \sin \alpha)$$

Setzt man hier $\operatorname{tang} \varphi$ für f, so erhält man

$$S = P\,(\cos \alpha + \operatorname{tang} \varphi \sin \alpha) - Q\,(\sin \varepsilon + \operatorname{tang} \varphi \cos \varepsilon)$$

$$= \frac{1}{\cos \varphi} P\,(\cos(\alpha - \varphi) - \frac{1}{\cos \varphi} Q \sin(\varepsilon + \varphi)$$

$$\text{oder } P = \frac{S \cos \varphi + Q \sin(\varepsilon + \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)},$$

woraus folgt, daß der kleinste Wert von P, der eine Resultante von bestimmter Größe (S) erzeugt, dann aufzuwenden ist, wenn der Winkel α den Nenner zu einem Maximum macht. Letzteres ist der Fall, wenn $\alpha = \varphi$.

§ 132. Soll die Bewegung längs der schiefen Ebene abwärts vor sich gehn, und wählt man demgemäß diese Richtung als die positive, so ist die Resultante (wenn man α wie bisher von dem aufwärts gehenden Teil der schiefen Ebene abzählt)

$$S' = Q \sin \varepsilon - P \cos \alpha - f\,(Q \cos \varepsilon - P \sin \alpha)$$

wobei das Vorzeichen des letzten Gliedes, welches die Reibung darstellt, wiederum negativ ist, da diese Kraft nach § 127 stets das der größeren Geschwindigkeit entgegengesetzte Vorzeichen hat.

Daraus folgt:

$$S' \cos \varphi = Q \sin(\varepsilon - \varphi) - P \cos(\alpha + \varphi)$$

$$P = \frac{Q \sin(\varepsilon - \varphi) - S' \cos \varphi}{\cos(\alpha + \varphi)}.$$

Die Diskussion dieser Formel gibt unter anderem Interessanten das Resultat, daß bei $\varepsilon > \varphi$, eine gleichförmige Bewegung ($S' = o$) durch eine bremsende Kraft P herbeigeführt wird, deren Größe dann am kleinsten ist, wenn $\alpha = -\varphi$ gewählt wird, d. h. die Richtung der Kraft um den Reibungswinkel unter die schiefe Ebene abgeht.

Anmerkung. Über den Bezirk der zulässigen Werte von α lassen sich hier analoge Betrachtungen anstellen wie in § 93. Die Resultate sind durch die Reibung wenig modifiziert.

§ 133. **Zapfenreibung** (der Stirnzapfen) findet bei der Drehung am Umfange der Cylinder (Zapfen) statt, mittelst deren horizontale Achsen in ihre Lager gebettet sind.

Es handelt sich um die Ermittelung des Kräftepaares, welches durch diese Reibung der Rotationsgeschwindigkeit der Achse entgegengestellt wird. Ist der Zapfendruck Q, der Reibungskoeffizient f, so kann man sich (bei gedeckten Lagern) die gesamte Reibung fQ in unzählige tangentiale Kräfte aufgelöst denken, welche rings um den Zapfen wirken. Diese verbinden sich zu Kräftepaaren, welche den Durchmesser des Zapfens zum Arme haben, und deren Kräfte sich zu $\pm \frac{fQ}{2}$ summieren. Das resultierende Moment ist demnach fQr, wobei r den Radius des Zapfens bezeichnet. Ein Kräftepaar von dieser Größe muß an der Achse wirken, wenn eine Verzögerung durch die Zapfenreibung nicht eintreten soll.

Diese Verzögerung selbst ist nach den Regeln des § 122 zu berechnen.

133 a. **Wälzende Reibung** findet statt, wenn sich ein Kreis-Cylinder über eine Cylinderfläche wälzt. Ist letztere Fläche eine ruhende Ebene, so ist die von der Reibung gelieferte verzögernde Kraft der wälzenden Bewegung

$$\frac{fQ}{r}$$

wobei Q der Reibungsdruck, r den Radius des Cylinders und f den Reibungskoeffizienten bezeichnet.

§ 134. Unter dem **Wirkungsgrade** einer mechanischen Vorrichtung versteht man das Verhältnis derjenigen Leistung, welche man als Zweck der mechanischen Vorrichtung betrachtet zu der aufgewendeten Arbeit.

So soll mittelst des Bauaufzuges in § 91 die Last Q auf eine gewisse Höhe h gehoben werden. Ist dieses geschehen, so ist die nutzbare Arbeit Qh geleistet. Die an der Kurbel angreifende Kraft

$$P = \frac{r_1 \cdot r_2}{R_1 \cdot R_2} Q$$

reicht zwar hin, Gleichgewicht herzustellen, aber sie ist zu klein um jene Arbeit Qh zu verrichten, weil außer der nutzbaren Arbeit noch Reibungsarbeit zu leisten ist, welche sich aus den Momenten der beiden Zapfenreibungen sowie der (kleinen) Reibung am Eingriff berechnen und auch leicht experimentell finden läßt, wenn man diejenige Kraft P′ mißt, welche statt P senkrecht zum Kurbelarme angebracht werden muß, um diesen Arm zu bewegen.

Da der Weg des Angriffspunktes unbedingt $\frac{R_1 \cdot R_2}{r_1 \cdot r_2} h$ ist, so ist die aufgewendete Arbeit

$$P' \cdot \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} \cdot h,$$

während die nutzbare $Qh = P \cdot \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} \cdot h$ ist.

Der Wirkungsgrad ist somit hier durch das Verhältnis der Kräfte $\frac{P}{P'}$ gegeben, oder, wenn derselbe durch Prozente (der aufgewendeten Arbeit) ausgedrückt werden soll, durch

$$W = 100 \frac{P}{P'}.$$

Dritter Teil.

A. Aufgaben über das Gleichgewicht.

I. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte an einem Punkte.

1. Zwei Kräfte von P und Q Kilogr., deren Richtungen einen Winkel $= \alpha$ bilden, greifen einen Punkt A an. Welches ist ihre Resultante der Größe und Richtung nach, wenn

1) $P = 74$;	2) $P = 126{,}4$;	3) $P = 233{,}8$;	4) $P = 97$;
$Q = 43$	$Q = 209{,}5$	$Q = 159{,}3$	$Q = 74{,}9$
$\alpha = 117^0$	$\alpha = 102^0 32'$	$\alpha = 90^0$	$\alpha = 151^0 34'$

2. Die Seitenkraft P bildet mit der Resultante R einen Winkel $= \beta$. Wie groß ist die andere Seitenkraft Q, sowie ihr Winkel γ, den sie mit R bildet, wenn

1) $P = 50$ *;	2) $P = 205{,}2$;	3) $P = 133$;	4) $P = 91{,}5$
$R = 150$	$R = 192{,}5$	$R = 218$	$R = 87{,}6$
$\beta = 47^0$	$\beta = 56^0 20'$	$\beta = 127^0$	$\beta = 12^0 38'$

3. Zwei Kräfte P und Q bilden mit ihrer Resultante R die Winkel β und γ. Wie groß ist Q und R, wenn

1) $P = 174$;	2) $P = 38{,}8$;	3) $P = 454$;	4) $P = 358{,}8$
$\beta = 53^0$	$\beta = 3^0 6'$	$\beta = 15^0 23'$	$\beta = 81^0 20'$
$\gamma = 63^0$	$\gamma = 92^0$	$\gamma = 46^0 29'$	$\beta = 24^0 33'$

4. Von drei Kräften P, P_1, P_2 in einer Ebene, welche den Punkt A angreifen, bilde P mit P_1 den $\sphericalangle \alpha$, P_1 mit P_2 den $\sphericalangle \beta$. Welches ist ihre Resultante der Größe und Richtung nach, wenn

1) $P = 12$; $P_1 = 24$; $P_2 = 14$; $\alpha = 21^0$; $\beta = 18^0$

2) $P = 66$; $P_1 = 19$; $P_2 = 16$; $\alpha = 40^0$; $\beta = 63^0$

3) $P = 30$; $P_1 = 25$; $P_2 = 28$; $\alpha = 18^0$; $\beta = 45^0$

---

*) Überall, wo die Einheit nicht näher bezeichnet ist, steht die Wahl derselben frei.

5. Welches ist der Größe und Richtung nach die Resultante aus den drei Kräften P, P_1, P_2, welche den Punkt A angreifen, wenn jede derselben auf den beiden andern senkrecht ist, und

1) $P = 18$;	2) $P = 48$;	3) $P = 80$;	4) $P = 72$
$P_1 = 24$	$P_1 = 14$	$P_1 = 144$	$P_1 = 16$
$P_2 = 72$	$P_2 = 120$	$P_2 = 42$	$P_2 = 63$

6. Welches sind die drei aufeinander senkrechten Komponenten X, Y, Z, welche mit ihrer Resultante R die Winkel λ, μ, ν machen, im Falle

1) $R = 560$; $\lambda = 80^0$; $\mu = 65^0$; $\nu = 27^0 11' 14,6''$
2) $R = 620$; $\lambda = 74^0$; $\mu = 70^0$; $\nu = 26^0\ 3' 25,8''$
3) $R = 750$; $\lambda = 63^0$; $\mu = 52^0$; $\nu = 49^0 54'\ 8,8''$

7. Drei gleiche Kräfte (P) im Raume bilden im Punkte A unter sich die Winkel α, β, γ. Welches ist ihre Resultante R der Größe und Richtung nach, wenn

1) $P = 21$; $\alpha = 32^0 50'$; $\beta = 48^0 24'$; $\gamma = 60^0$
2) $P = 27$; $\alpha = 30^0$; $\beta = 60^0$; $\gamma = 90^0$
3) $P = 45$; $\alpha = 16^0 25'$; $\beta = 33^0 12'$; $\gamma = 45^0$

8. Drei Kräfte, welche in einer Ebene liegen und den Punkt A angreifen, bilden mit der Richtung AX beziehungsweise die Winkel α, β, γ. Welches ist ihre Resultante der Größe und Richtung nach, wenn

1) $P = 39$; $P_1 = 27$; $P_2 = 9$; $\alpha = 12^0$; $\beta = 40^0$; $\gamma = 109^0$
2) $P = 46$; $P_1 = 91$; $P_2 = 36$; $\alpha = 24^0$; $\beta = 97^0$; $\gamma = 204^0$
3) $P = 76$; $P_1 = 87$; $P_2 = 47$; $\alpha = 49^0$; $\beta = 120^0$; $\gamma = 215^0$
4) $P = 56$; $P_1 = 35$; $P_2 = 64$; $\alpha = 70^0$; $\beta = 104^0$; $\gamma = 140^0$

9. Zwei Kräfte P und Q machen mit der Richtung AX beziehungsweise die Winkel α und $90^0 + \alpha$. Welchen Winkel macht die Resultante R mit AX, wenn

1) $P = 72$;	2) $P = 37$;	3) $P = 49$;	4) $P = 124$
$Q = 49$	$Q = 95$	$Q = 23$	$Q = 78$
$\alpha = 75^0$	$\alpha = 93^0$	$\alpha = 172^0$	$\alpha = 79^0$

10. Eine Kraft R soll in zwei rechtwinkelige Komponenten P und Q zerlegt werden, welche sich verhalten wie 5 : 12. Wie groß sind diese Komponenten, wenn

1) R = 78; 2) R = 117; 3) R = 169; 4) R = 208

II. Gleichgewicht an einem Punkte.

11. Drei Kräfte P, Q und R in einer Ebene halten sich am Punkte A das Gleichgewicht. Welches sind die Winkel α, β, γ, die sie unter sich bilden, wenn

1) P = 10;	2) P = 12;	3) P = 21;	4) P = 7
Q = 14	Q = 16	Q = 28	Q = 24
R = 18	R = 20	R = 35	R = 25

12. Welche Winkel macht in der vorausgehenden Aufgabe R mit P und Q, wenn P und Q den Winkel α einschließen und

1) P = 37,5;	2) P = 83,6;	3) P = 67;	4) P = 28
Q = 48,9	Q = 49,5	Q = 92	Q = 43
$\alpha = 60^0$	$\alpha = 93^0$	$\alpha = 124^0$	$\alpha = 165^0$

13. Die Kräfte P, Q und R in einer Ebene halten sich am Punkte A das Gleichgewicht. Welche Winkel machen P und Q mit der Richtung AX, wenn R einen Winkel = γ mit AX macht, und

1) P = 96,8;	Q = 73;	R = 136,3;	$\gamma = 45^0$
2) P = 125,7;	Q = 81,5;	R = 91,2;	$\gamma = 34^0$
3) P = 76,5;	Q = 124;	R = 85,6;	$\gamma = 75^0$

14. An den Endpunkten eines Seiles, welches über zwei vertikale Seitrollen in A und B geführt wird, wirken zwei Gewichte P und Q. Wie groß muß ein drittes Gewicht R in C (zwischen A und B) angebracht werden, damit Gleichgewicht stattfinde und Winkel ACB ein rechter sei, wenn

1) P = 24;	2) P = 504;	3) P = 77;	4) P = 48
Q = 70	Q = 78	Q = 36	Q = 14

15. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe der Winkel α, welchen AC mit dem Horizont macht?

16. Wenn in der Aufgabe 14 das Gewicht R hinweggenommen wird, so besteht nur dann Gleichgewicht, wenn P = Q ist, wie auch die gegenseitige Lage von A und B sein mag. Warum?

17. Wie groß ist in Aufgabe 14 Winkel ACB, wenn P = Q und

1) P = 4,15;	2) P = 3,85;	3) P = 7,54;	4) P = 5,73
R = 6,34	R = 4,92	R = 5,38	R = 7,48

18. Welches ist in 17 der höchste Wert, den R annehmen kann?

19. Ein Seil, welches in A befestigt und über eine feste Rolle in B (tiefer als A gelegen), geleitet ist, trägt an seinem Ende eine Last Q. An einer Stelle C zwischen A und B wird ein Gewicht P festgemacht, welches das Seil so spannt, daß der Teil BC eine horizontale Richtung annimmt. Welches ist die Spannung S des Teiles AC und die Depression α von AC unter den Horizont, wenn

1) P = 30;	2) P = 90;	3) P = 33;	4) P = 55
Q = 16	Q = 56	Q = 56	Q = 48

20. In zwei in gleicher Höhe über dem Horizonte gelegenen Punkten A und B von der Entfernung AB = a Meter werden zwei Seile befestigt. Das eine von der Länge AC = b ($<$ a) trägt in C einen Ring, das andere geht durch den Ring in C und trägt an seinem Ende ein Gewicht P, welches die beiden Seile so spannt, daß ACB die Gestalt eines Dreieckes annimmt. Bestimme die Spannung S von AC und den Winkel α, welchen AC mit AB macht, wenn

1) a = 2;	2) a = 1,56;	3) a = 2,55;	4) a = 6,09
b = 0,7	b = 1,19	b = 1,61	b = 0,41
P = 15	P = 26	P = 17	P = 40

21. In den Punkten A und B einer horizontalen Geraden AB = a ist eine Schnur von solcher Länge = s in ihren Enden fest gemacht, daß ein in C angebrachtes Gewicht P die-

selbe unter einem Winkel $ACB = 90^0$ spannt. Welche Spannung S und S_1 erleidet AC und BC, wenn

1) $a = 1{,}5$;	2) $a = 2{,}5$;	3) $a = 2{,}5$;	4) $a = 1{,}7$
$s = 2{,}1$	$s = 3{,}5$	$s = 3{,}1$	$s = 2{,}3$
$P = 40$	$P = 75$	$P = 50$	$P = 34$

22. Wie groß berechnet sich S und S_1 in 21, wenn C die Mitte der Schnur ist, a, s, P ungeändert bleiben?

23. Ein vertikales auf der Basis AC ruhendes gleichschenkeliges Dreieck trägt ein mittelst einer Schnur in der Spitze B angebrachtes Gewicht P. Welche Druckspannung R hat die Seite $= a$ und welche Zugspannung R_1 die Basis $= b$ zu leisten, wenn

1) $a = 1{,}5$;	2) $a = 2{,}6$;	3) $a = 5$;	4) $a = 1{,}7$
$b = 1{,}8$	$b = 2$	$b = 6$	$b = 1{,}6$
$P = 96$	$P = 120$	$P = 72$	$P = 60$

24. Von vier Kräften P, P_1, P_2, P_3 in einer Ebene, welche sich an einem Punkte A das Gleichgewicht halten, macht P mit P_1, desgleichen P_2 mit P_3 einen Winkel $= 90^0$. Wie groß ist P_3 und welchen Winkel machen die zunächst liegenden Kräfte P_1 und P_2 mit einander, wenn

1) $P = 14$;	2) $P = 154$;	3) $P = 126$;	4) $P = 21$
$P_1 = 48$	$P_1 = 72$	$P_1 = 19{,}5$	$P_1 = 72$
$P_2 = 39$	$P_2 = 40$	$P_2 = 41$	$P_2 = 61$

25. Wie groß sind in der vorigen Aufgabe P_2 und P_3, wenn $P \perp P_3$, $P_1 \perp P$ und P mit P_1 einen Winkel $= \beta$ macht, falls

1) $P = 21$;	2) $P = 6$;	3) $P = 28$;	4) $P = 15$
$P_1 = 28$	$P_1 = 17{,}5$	$P_1 = 96$	$P_1 = 8$
$\beta = 60^0$	$\beta = 15^0$	$\beta = 53^0$	$\beta = 35^0$

26. Von vier Kräften P, P_1, P_2, R im Raume, welche an einem Punkte A sich das Gleichgewicht halten, sind die ersten drei auf einander senkrecht. Welche Winkel macht R mit den drei senkrechten Kräften, wenn

1) $P = 6$;	2) $P = 8$;	3) $P = 12$;	4) $P = 12$
$P_1 = 8$	$P_1 = 11$	$P_1 = 11$	$P_1 = 16$
$P_2 = 14$	$P_2 = 16$	$P_2 = 24$	$P_2 = 48$

III. Resultante und Gleichgewicht paralleler Kräfte.

27. Zwei parallele Kräfte P und P_1 greifen in den Punkten A und B einer Geraden an und haben von einem dritten Punkte O derselben Geraden eine Entfernung $OA = a$ $OB = a_1$. Welches ist ihre Resultante R und deren Entfernung vom Punkte O wenn

1) $P = 26$; $a = 3{,}4$; $P_1 = 14$; $a_1 = 5{,}2$
2) $P = 74$; $a = 2{,}4$; $P_1 = -34$; $a_1 = 0{,}8$
3) $P = 42$; $a = 5{,}3$; $P_1 = 32$; $a_1 = 1{,}5$
4) $P = 24$; $a = -5$; $P_1 = -24$; $a_1 = 0{,}5$

28. Drei parallele Kräfte P, P_1, P_2 an einer Geraden greifen in A, B, C an und haben vom Punkte O derselben Geraden eine Entfernung $OA = a$, $OB = a_1$, $OC = a_2$. Welches ist ihre Resultante, sowie deren Entfernung von O, wenn

1) $P = 12$; $a = 3$; $P_1 = -9$; $a_1 = 4$; $P_2 = 7$; $a_2 = 0{,}6$
2) $P = 25$; $a = -2$; $P_1 = 13$; $a_1 = 3$; $P_2 = -8$; $a_2 = -0{,}4$
3) $P = -33$; $a = -4$; $P_1 = 48$; $a_1 = 5$; $P_2 = 6$; $a_2 = -17$

29. Drei parallele Kräfte, P, Q, R an einer Geraden, deren Entfernung vom Punkte O dieser Geraden, analog der vor. Aufg. mit a, a_1, a_2 bezeichnet sind, halten sich das Gleichgewicht. Wie groß ist R und an welchem Punkte greift sie an, wenn

1) $P = 68$; $a = 1{,}2$; $Q = 52$; $a_1 = 4{,}2$
2) $P = -44$; $a = -3{,}6$; $Q = 26$; $a_1 = 1{,}8$
3) $P = 36$; $a = -4$; $Q = -60$; $a_1 = 2{,}4$

30. An den Endpunkten eines horizontalen Dreieckes ABC wirken drei gleiche Gewichte $= P$. Bestimme die Resultante R und den Angriffspunkt O derselben durch die Seiten a, b, c, wenn

1) $P = 30$;	$a = 26$;	$b = 17$;	$c = 25$
2) $P = 58$;	$a = 25$;	$b = 28$;	$c = 17$
3) $P = 64$;	$a = 13$;	$b = 40$;	$c = 37$
4) $P = 80$;	$a = 45$;	$b = 42$;	$c = 39$

31. In der Ebene der zwei Senkrechten OX und OY befindet sich ein Dreieck ABC, dessen Ecken die Abscissen a, a_1, a_2, und die Ordinaten b, b_1, b_2 haben. Bestimme die Resultante der drei parallelen Kräfte P, P_1, P_2, welche in A, B, C angreifen, sowie ihren Mittelpunkt, wenn

(1)	$P = 46$;	$P_1 = -37$;	$P_2 = 16$
	$a = 5{,}2$;	$a_1 = 0$	$a_2 = -4$
	$b = 3{,}5$;	$b_1 = 0$	$b_2 = 1{,}2$
(2)	$P = 29$;	$P_1 = 35$	$P_2 = -14$
	$a = 3{,}2$	$a_1 = -2$	$a_2 = 0$
	$b = 4{,}3$	$b_1 = 3{,}5$;	$b_2 = 0{,}8$
(3)	$P = 27$;	$P_1 = -35$;	$P_2 = 13$
	$a = 2{,}5$;	$a_1 = -2{,}4$;	$a_2 = -3$
	$b = 1{,}4$;	$b_1 = 3$;	$b = 2{,}6$

32. An den Ecken A, B, C eines rechtwinkeligen Dreieckes wirken drei Kräfte P, P_1, P_2 senkrecht auf die Ebene desselben. Bestimme die Lage des Angriffspunktes der Resultante R aus den Katheten AC = a und BC = b von C aus, wenn

1) $P = 28$;	$P_1 = -48$;	$P_2 = 60$;	$a = 3$;	$b = 4$
2) $P = 34$;	$P_1 = 20$;	$P_2 = 46$;	$a = 6$;	$b = 8$
3) $P = 52$;	$P_1 = 28$;	$P_2 = -32$;	$a = 9$;	$b = 12$

33. An den Eckpunkten eines Rechteckes, dessen Seiten AD = a, AB = b sind, wirken vier Gewichte. Welches ist die Lage des Angriffspunktes der Resultante R von A aus, wenn

1) $P = 14$;	$P_1 = 18$;	$P_2 = 24$;	$P_3 = 8$;	$a = 12$;	$b = 18$
2) $P = 11$;	$P_1 = 4$;	$P_2 = 12$;	$P_3 = 9$;	$a = 12$;	$b = 6$
3) $P = 12$;	$P_1 = 16$;	$P_2 = 26$;	$P_3 = 3$;	$a = 9$;	$b = 5$

34. Ein Seil, welches in den Punkten A und B einer horizontalen Geraden festgemacht ist, trägt in C und D die Ge-

wichte P und Q so, daß CD ‡ AB und die Winkel α, β, welche AC und BD mit AB machen, sich zu 90° ergänzen, also $\alpha + \beta = 90^0$ ist. Welche Spannung S, S_1, S_2 erleiden AC, CD und BD, wenn

1) $P = 24$;	2) $P = 16{,}8$;	3) $P = 6$;	4) $P = 33{,}6$
$Q = 36$	$Q = 24$	$Q = 4{,}8$	$Q = 8{,}4$
$\sin\alpha = 0{,}6$	$\sin\alpha = 0{,}28$	$\sin\alpha = 0{,}8$	$\sin\alpha = 0{,}96$

IV. Gleichgewicht und Resultante beliebiger Kräfte in einer Ebene.

Vorerinnerung. Um die Richtung einer Kraft ohne Mißverständnis auszudrücken, bestimmen wir den Winkel, den die Kraft mit der positiven Richtung einer festen Geraden AX macht. Dieser Winkel hat einen Spielraum von 0 bis 360°. Jede Kraft ist dann nur der Größe nach auszudrücken.

35. Welches ist der Angriffspunkt C, die Größe und Richtung der Resultante R zweier Kräfte P und Q, welche in A und B angreifen und mit der Geraden $AB = a$ in einer Ebene die Winkel α und β machen, wenn A Anfangspunkt und

1) $P = 5$;	$\alpha = 180^0$;	$Q = 12$:	$\beta = 90^0$;	$a = 6$
2) $P = 9$;	$\alpha = 45^0$;	$Q = 12$;	$\beta = 135^0$;	$a = 7$
3) $P = 10$;	$\alpha = 60^0$;	$Q = 6$;	$\beta = 120^0$;	$a = 8$
4) $P = 13$;	$\alpha = 90^0$;	$Q = 15$;	$\beta = 270^0$;	$a = 4$

36. Drei Kräfte P, P_1, P_2 wirken in der Ebene des Dreieckes ABC an dessen Eckpunkten und bilden mit der Basis b beziehungsweise die Winkel α, β, γ, während die Basis b mit der Seite c den Winkel A einschließt. Bestimme Größe und Richtung der Resultante, sowie die Lage des Angriffspunktes von A aus, wenn

1) $b = 12$;	$c = 9$;	$A = 60^0$
$\alpha = 0^0$;	$\beta = 90^0$;	$\gamma = 180^0$
$P = 9$;	$P_1 = 8$;	$P_2 = 15$
2) $b = 15$;	$c = 8$;	$A = 90^0$
$\alpha = 60^0$;	$\beta = 240^0$;	$\gamma = 120^0$
$P = 29$;	$P_1 = 9$;	$P_2 = 12^0$

3) $b = 9$; $c = 6$; $A = 120^0$
$\alpha = 180^0$; $\beta = 90^0$; $\gamma = 45^0$
$P = 16$; $P_1 = 16$; $P = 8$

37. Drei Kräfte P, Q, R, welche in der Ebene des gleichseitigen Dreieckes ABC an dessen Eckpunkten sich das Gleichgewicht halten, bilden mit der Basis $AC = b$ beziehungsweise die Winkel α, β, γ. Welche Werte haben diese Winkel, wenn

1) $b = 6$; $P = 5$; $Q = 7$; $R = 9$
2) $b = 8$; $P = 8$; $Q = 9$; $R = 5$
3) $b = 10$; $P = 12$; $Q = 5$; $R = 7$

38. Drei Kräfte P, Q, R in einer Ebene, welche an den Punkten A, B, C einer Geraden angreifen, halten sich das Gleichgewicht und bilden mit $AB = a$ beziehungsweise die Winkel α, β, γ. Bestimme R, ihren Richtungswinkel γ und die Lage von C, wenn

1) $a = 4$; $P = 8$; $\alpha = 60^0$; $Q = 5$; $\beta = 180^0$
2) $a = 5$; $P = 7$; $\alpha = 90^0$; $Q = 24$; $\beta = 0^0$
3) $a = 9$; $P = 12$; $\alpha = 20^0$; $Q = 9$; $\beta = 200^0$
4) $a = 8$; $P = 32$; $\alpha = 240^0$; $Q = 20$; $\beta = 120^0$

39. An den Eckpunkten der Diagonale AC eines Parallelogramms ABCD wirken P und P_2 längs AC in entgegengesetzter Richtung zu einander; desgleichen P_1 und P_3 in der Diagonale BD. Bestimme Größe und Richtung der Resultante, wenn die Diagonalen einen Winkel $= \varphi$ einschließen und

1) $P = 18$; $P_2 = 35$; $P_1 = 21$; $P_3 = 33$; $\varphi = 49^0$
2) $P = 25$; $P = 41$; $P_1 = 32$; $P_3 = 19$; $\varphi = 129^0$
3) $P = 14$; $P_2 = 19$; $P_1 = 26$; $P_3 = 28$; $\varphi = 75^0$

40. In der Ebene eines gleichschenkeligen und rechtwinkeligen Dreieckes halten sich drei Kräfte P, Q, R an den Eckpunkten im Gleichgewicht. Welche Winkel bilden sie mit der Hypotenuse, wenn

1) $P = 3$;	2) $P = 5$;	3) $P = 9$;	4) $P = 12$
$Q = 5$	$Q = 10$	$Q = 7$	$Q = 9$
$R = 7$	$R = 8$	$R = 3$	$R = 6$

41. Drei gleiche Kräfte halten sich an den Ecken eines Dreieckes ABC in dessen Ebene im Gleichgewicht. Welche Winkel bilden sie mit der Seite AC = b, wenn

1)	2)	3)	4)
a = 14 ;	a = 12 ;	a = 10 ;	a = 22
b = 20	b = 16	b = 20	b = 12
C = 60^0	C = 30^0	C = 135^0	C = 120^0

V. Bestimmung des Schwerpunktes mit Anwendungen.

42. Welche Entfernung hat der Schwerpunkt eines gleichschenkeligen Dreieckes von den drei Eckpunkten desselben, wenn Seite (a) und Basis (b)

1)	2)	3)	4)
a = 20;	a = 13;	a = 17;	a = 25
b = 24	b = 10	b = 16	b = 14

43. Welche Entfernung hat der Schwerpunkt eines rechtwinkeligen Dreieckes von den drei Eckpunkten desselben, im Falle die beiden Katheten

1)	2)	3)	4)
a = 30;	a = 48;	a = 54;	a = 42
b = 72	b = 90	b = 72	b = 144

44. Berechne die Entfernungen x, y des Schwerpunktes des Umfanges eines Dreieckes von den Seiten a und b, wenn

1)	2)	3)	4)
a = 10;	a = 26;	a = 8;	a = 35
b = 21	b = 17	b = 15	b = 12
c = 17	c = 25	c = 17	c = 37

45. Welche Entfernung vom Mittelpunkt eines Kreises hat der Schwerpunkt des Bogens des Centriwinkels = α, wenn
1) $\alpha = 60^0$; 2) $\alpha = 90^0$; 3) $\alpha = 120^0$; 4) $\alpha = 240^0$

46. Welche Entfernung hat der Schwerpunkt eines homogenen Dreieckes von der Basis b, wenn die Seiten

1)	2)	3)	4)
a = 30;	a = 37;	a = 61;	a = 50
b = 28	b = 40	b = 36	b = 104
c = 26	c = 13	c = 65	c = 102

47. Bestimme den Schwerpunkt eines Trapezes aus seinen parallelen Seiten a und b und deren senkrechtem Abstande h, wenn

1) $a = 12$; 2) $a = 16$; 3) $a = 4$; 4) $a = 15$
$b = 18$ $b = 24$ $b = 10$ $b = 24$
$h = 5$ $h = 6$ $h = 7$ $h = 2{,}6$

48. Welche Entfernung vom Mittelpunkte des Kreises hat der Schwerpunkt eines Segmentes, wenn der Centriwinkel des Bogens $= 60^0$ ist, im Falle $\pi = 3{,}14159$ und
1) $r = 2{,}17406$; 2) $r = 3{,}26109$; 3) $r = 4{,}34812$;
4) $r = 5{,}43515$

49. Welches ist die Entfernung des Schwerpunktes eines Ringes zweier concentrischen Kreise von den Radien r und 2r vom Mittelpunkte, wenn der Centriwinkel $= 60^0$ ist und
1) $r = 3\pi$; 2) $r = 6\pi$; 3) $r = 3{,}6$; 4) $r = 5{,}4$

50. Wird einem gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck ein Kreis eingeschrieben, so hat der Schwerpunkt, der zwischen Kreis und rechtem Winkel enthaltenen Fläche vom Kreismittelpunkt eine Entfernung

$$x = \frac{2a(\sqrt{2} - 1)}{3(4 - \pi)},$$

wenn a die Kathete ist. Beweis!

51. Werden von einem Punkte A in einer Entfernung vom Mittelpunkt des Kreises $AC = a$ zwei Tangenten AB und AD, sowie die Radien $CB = CD = r$ gezogen, so hat der Schwerpunkt des Viereckes ABCD eine Entfernung von C

$$x = \frac{1}{3}\,\frac{a^2 + r^2}{a}.$$ Beweis!

52. Schneiden sich zwei excentrische Kreise, deren Mittelpunkte A und B sind, in den Punkten C und D so, daß $\angle CAD = 90^0$ und $\angle CBD = 60^0$ ist, so hat der Schwerpunkt des gemeinschaftlichen Segmentes eine Entfernung von A, wenn $AC = r$ ist

$$x = \frac{r(\sqrt{2} + \sqrt{6})(2\pi - 3\sqrt{3})}{7\pi - 6(1 + \sqrt{3})}.$$ Beweis!

53. Welche Entfernung hat der Schwerpunkt eines Tetraeders von jeder Seitenfläche, wenn die Kante

1) $a = 12\sqrt{6}$; 2) $a = 15{,}6$; 3) $a = 4{,}8$; 4) $a = 3{,}6$

54. Bezeichnet a die Kante eines regulären Polyeders, so hat der Schwerpunkt von jedem Ecke eine Entfernung

$$x = \frac{a}{4}\sqrt{6} \text{ im Tetraeder,}$$

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ im Hexaeder,}$$

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2} \text{ im Oktaeder,}$$

$$x = \frac{a}{4}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}} \text{ im Dodekaeder,}$$

$$x = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \text{ im Ikosaeder.}$$ Beweis!

55. Bestimme die Lage des Schwerpunktes einer abgekürzten Pyramide aus den parallelen Grundflächen G, g und ihrem Abstande h, wenn

1) $G = 36$;	2) $G = 32$;	3) $G = 12$;	4) $G = 50$
$g = 16$	$g = 18$;	$g = 3$;	$g = 18$
$h = 7{,}6$	$h = 7{,}4$	$h = 14$;	$h = 19{,}6$

56. Bestimme die Lage des Schwerpunktes eines abgekürzten Kegels aus den Radien R, r der parallelen Grundflächen und ihrem Abstande h, wenn

1) $R = 5$;	2) $R = 9$;	3) $R = 10$;	4) $R = 12$
$r = 3$	$r = 5$	$r = 6$	$r = 6$
$h = 9{,}8$	$h = 6{,}04$	$h = 4{,}9$	$h = 6{,}3$

57. Zwei homogene gleichdichte Kugeln mit den Radien R und r sind in ihren Mittelpunkten A und B durch eine feste Gerade $AB = a$ zu einem System verbunden. Wo liegt der gemeinsame Schwerpunkt, wenn

1) $R = 31$;	2) $R = 41$;	3) $R = 15$;	4) $R = 19$
$r = 3$	$r = 2{,}5$	$r = 4$	$r = 5$
$a = 125$	$a = 250$	$a = 204$	$a = 30$

58. Bestimme die Entfernung des Schwerpunktes eines jeden der beiden Sektoren einer Kugel vom Mittelpunkte, wenn R der Radius der Kugel und r der Radius des Kugelkreises ist, im Falle

1) $R = 52$;	2) $R = 40$;	3) $R = 60$;	4) $R = 68$
$r = 20$	$r = 32$	$r = 36$	$r = 32$

59. Bestimme die Entfernung des Schwerpunktes beider Kugelsegmente vom Mittelpunkte, wenn r der Kugelradius und a der Abstand der Schnittfläche vom Centrum ist, falls

1) $r = 14$;	2) $r = 10$;	3) $r = 8$;	4) $r = 12$
$a = 2$	$a = 5$	$a = 4$	$a = 6$

60. Sind a, b, c die Seitenkanten d, e, f die Grundkanten einer dreiseitigen Pyramide, so ist die Entfernung des Schwerpunktes von der Spitze ausgedrückt durch

$$x = \frac{1}{4}\sqrt{3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - d^2 - e^2 - f^2}.$$ Beweis!

61. Wird ein Cylinder von der Höhe h von oben nach unten konisch ausgebohrt, so daß der Kegel seine Spitze im Mittelpunkt der unteren Basis des Cylinders und mit dem Cylinder gleiche Basis hat, so beträgt die Entfernung des Schwerpunktes des übrig bleibenden Körpers von der unteren Basis

$$x = \frac{3}{8} h.$$ Beweis!

62. Wird in derselben Weise wie vorhin ein abgekürzter Kegel von den Radien R und r konisch ausgebohrt, so hat der Schwerpunkt des massiven Teiles eine Entfernung

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{R + 2r}{R + r}.$$ Beweis!

63. Wird in derselben Weise ein abgekürzter Kegel cylindrisch ausgebohrt, so ist

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{R + 3r}{R + 2r}.$$ Beweis!

64. Wird ein abgekürzter Kegel konisch ausgebohrt, so daß der Kegel seine Spitze im Mittelpunkte des Kreises r und

eine Basis vom Radius = r hat, so ist der Abstand des Schwerpunktes des massivem Körpers vom Kreise R

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 2r^2}{R^2 + Rr}.$$ Beweis!

65. Wird ein vertikal stehender massiver Cylinder von einer horizontalen Kraft P in einer Höhe = h angegriffen, so besteht Gleichgewicht, d. h. der Cylinder wird nicht umgeworfen, so lange

$$h \cdot P \leqq r \cdot Q$$

ist, worin r den Radius und Q das Gewicht des Cylinders bezeichnet. Beweis!

66. Das Nämliche gilt vom Kegel und Kegelstumpf. Beweis!

67. Die kreisrunde Platte eines Tisches ruht im Centrum auf einem Gestelle, dessen Basis gleichfalls kreisrund ist. Welche Belastung P kann der Tisch in einem Punkte seines Randes noch tragen, ohne umzufallen, wenn Q sein Gewicht, R und r die Radien der beiden Kreisflächen sind?

68. Eine Leiter vom Gewichte Q ruht mit ihrem oberen Ende auf einer glatten schiefen Ebene von 60° Neigung, mit ihrem unteren auf einer glatten horizontalen Ebene. Welche horizontale Kraft P hindert die Leiter am Gleiten, wenn sie gegen den Horizont eine Neigung = 30° hat?

69. Eine Kugel vom Gewichte Q ruht auf zwei schiefen Ebenen von den Elevationswinkeln α und β. Welchen Druck D und D_1 übt sie auf jede der beiden Ebenen aus?

70. Ein schwerer homogener Stab vom Gewichte Q ruht in seinen Endpunkten auf zwei glatten schiefen Ebenen von der Neigung α und β. Bestimme den Druck D und D_1 auf die Ebenen und die Lage des Gleichgewichts!

71. Ein homogener Stab vom Gewichte R wird mittelst Leitrollen von den Gewichten P und Q in horizontaler Lage getragen. Welche Winkel α und β machen P und Q mit dem Stabe, wenn Gleichgewicht stattfindet?

72. Ein homogener Stab AB = a vom Gewichte Q

stützt sich in seinem unteren Endpunkte A gegen eine vertikale Ebene, ruht in C auf einem festen Punkte und trägt in B ein Gewicht = P. Bestimme AC = x und den Neigungswinkel α, welchen AB mit dem Horizont machen muß, damit Gleichgewicht stattfinde, wenn der senkrechte Abstand von C = b ist?

73. Ein homogenes Trapez vom Gewichte Q ruht mit seinen parallelen horizontalen Seiten a und b auf zwei glatten schiefen Ebenen von der Neigung α und β. Welches ist der Neigungswinkel γ des Trapezes gegen den Horizont im Zustande des Gleichgewichts, wenn h die Höhe des Trapezes ist?

74. Ein Dreieck, dessen Seiten a, b, c sind, liegt horizontal auf drei Stützpunkten, welche in seinen Ecken angebracht sind. Wie groß ist der Druck auf jede der Stützen, wenn jede Flächeneinheit des Dreiecks eine Gewichtseinheit wiegt?

VI. Gleichgewicht an Maschinen.

a) Mathematischer Hebel.*)

75. Ein zweiarmiger Hebel AB trägt an dem einen Arm = a ein Gewicht P und an dem andern = b ein Gewicht Q. Bestimme Q und den Druck D auf den Stützpunkt, wenn

1) P = 60;	2) P = 150;	3) P = $37\frac{1}{2}$;	4) P = 35
a = 6	a = $5\frac{1}{3}$	a = 7,5	a = 3,2
b = $3\frac{1}{3}$	b = $4\frac{1}{6}$	b = 2,5	b = 0,5

76. An dem Endpunkte des einarmigen horizontalen Hebels AB = a hält eine vertikale Kraft P der Last Q das Gleichgewicht. Bestimme den Angriffspunkt C der Last und den Druck D, wenn

1) P = 18,5;	2) P = 24,4;	3) P = 12,5;	4) P = 22,8
Q = 55,5	Q = 73,2	Q = 63,5	Q = 114
a = 3,9	a = 4,5	a = 3,5	a = 1,5

*) Unter einem mathematischen Hebel ist ein Hebel verstanden, dessen Gewicht gegen die an ihm angreifende Kräfte verschwindend klein ist.

77. Ein Hebel AB = a trägt an seinen Endpunkten die Gewichte P und Q im Gleichgewicht. Wo liegt der Stützpunkt C, wenn

1) P = 45;	2) P = 34,5;	3) P = 28,4;	4) P = 52,5
Q = 20,7	Q = 27,6	Q = 35,5	Q = 45,5
a = 7,3	a = 5,4	a = 4,5	a = 5,6

78. Die zwei Arme eines Hebels, welche sich wie a : b verhalten, tragen an ihren Endpunkten zusammen eine Last Q im Gleichgewicht. Wie viel Gewicht trägt jeder, wenn

1) Q = 62,7;	2) Q = 49,2;	3) Q = 153;	4) Q = 265
a = 2,3	a = 1,7	a = 2,6	a = 2,8
b = 3,4	b = 2,4	b = 1,9	b = 2,5

79. An einem horizontalen gewichtslosen Stabe AB ist im Punkte C eine Last Q so aufgehängt, daß die Proportion AC : BC = a : b stattfindet. Wie groß ist der Druck in A und B, wenn

1) a = 1,9;	2) a = 2,3;	3) a = 0,95;	4) a = 2,45
b = 2,4	b = 3,5	b = 1,43	b = 1,13
Q = 64,5	Q = 52,2	Q = 119	Q = 179

80. An einem horizontalen, in A und B unterstützten unbiegsamen Stabe von der Länge AB = 2 sind in C und D die Gewichte P = 24 und Q = 50 Kilogramm angebracht. Bestimme den Druck in A und B, wenn

1) AC = 0,5;	2) AC = 0,6;	3) AC = 0,8;	4) AC = 0,9
AD = 1,2	AD = 1,3	AD = 1,5	AD = 1,4

81. Ein rechtwinkeliger Hebel ACB, welcher im Scheitel C um eine horizontale Achse drehbar ist, trägt in A und B die Gewichte P und Q im Gleichgewicht. Bestimme die Winkel α und β, welche AC = 4 und BC = 5 mit dem Horizont machen, wenn

1) P = 4,65;	2) P = 3,65;	3) P = 7,28;	4) P = 8,63
Q = 3,72	Q = 4,32	Q = 6,45	Q = 6,72

b) physischer Hebel.

82. Ein prismatischer homogener Stab AB = a wiegt

1,6 Kilogramm und trägt an seinen Endpunkten A und B die Gewichte P und Q und hat seinen Unterstützungspunkt in C. Bestimme Q für den Fall des Gleichgewichts, wenn

1) P = 16;	2) P = 24;	3) P = 14;	4) P = 9,5
a = 4,2	a = 3,8	a = 2,8	a = 3,2
AC = 2,6	AC = 2,2	AC = 1,2	AC = 1,6

83. Bestimme in der vorigen Aufgabe AC, wenn

1) P = 8,8;	2) P = 11,2;	3) P = 13,2;	4) P = 9,2
Q = 9,6	Q = 17,2	Q = 15,2	Q = 19,2
a = 2,5	a = 4,5	a = 3	a = 3,6

84. Ein prismatischer homogener Hebel AB = a vom Gewichte p kann sich in A in einem festen Scharnier frei bewegen und soll durch eine in B angreifende Kraft P horizontal getragen werden. Welchen Winkel α macht P mit dem Horizont, wenn

1) P = 5,9;	2) P = 25,4;	2) P = 7,18;	4) P = 9,72
p = 5,9	p = 39,6	p = 11,9	p = 13,85

85. Bestimme in der vorigen Aufgabe das Gewicht p, wenn

1) P = 6,72;	2) P = 31,8;	3) P = 16,17;	4) P = 15,88
$\alpha = 25^0 9'$	$\alpha = 75^0 31'$	$\alpha = 62^0 41'$	$\alpha = 47^0 33'$

86. Welches ist in den beiden vorhergehenden Aufgaben der horizontale und vertikale Widerstand R, R_1 des Scharniers?

87. An einer unbiegsamen horizontalen Stange, welche 6 Meter lang und 24 Kilogramm schwer ist und in A und B auf Lagern ruht, ist in C ein Gewicht Q = 192 Kilogramm angebracht. Bestimme den Druck D in A, sowie AC aus dem Druck D_1 in B, wenn

1) $D_1 = 76$; 2) $D_1 = 108$; 3) $D_1 = 140$; 4) $D_1 = 172$

88. Welchen Druck bringt das Gewicht P = 8 Kilogramm im Punkt A des Hebels AB = a Centimeter auf ein Sicherheitsventil in C hervor, wenn p = 1,6 Kilogr. das Gewicht und BD = 20^{cm} die Entfernung des Schwerpunktes D vom Drehungspunkt B des Hebels bezeichnet, falls

1) a = 22;	2) a = 41;	3) a = 26;	4) a = 27,7 cm
BC = 4	BC = 6	BC = 5	BC = 4,4 cm

89. An einer unrichtigen Krämerwage wiegt ein Gegenstand P Kilogramm in der einen Wagschale, dagegen Q Kilogramm in der andern. Welches ist das wahre Gewicht G, wenn

1) $P = 2\frac{5}{8}$;	2) $P = 3\frac{3}{8}$	3) $P = 18\frac{3}{4}$	4) $P = 11\frac{1}{4}$	5) $P = 13\frac{1}{3}$
$Q = 3\frac{3}{7}$	$Q = 2\frac{2}{3}$	$Q = 16\frac{1}{3}$	$Q = 8\frac{8}{9}$	$Q = 16\frac{7}{8}$

90. Eine empfindliche zweiarmige Wage gibt bei einem Übergewicht von 7 Milligramm einen Ausschlagwinkel = 9^0. Bei welchem Übergewicht q ist der Ausschlagwinkel = β, wenn

1) $\beta = 3^0$; 2) $\beta = 2^0$; 3) $\beta = 1^0$; 4) $\beta = \frac{1}{2}^0$

90a. Als Jemand das Gewicht eines Körpers auf einer gleicharmigen Wage bestimmen wollte, fand er, daß bei einer Belastung von 90,832 gr der Zeiger schon um 1,5 Grade über den Nullpunkt hinausging, und daß dieser Ausschlag bis auf 3,7 Grade anwuchs, als er der Belastung noch ein weiteres Milligramm hinzufügte. Wie groß ist auf Zehntel Milligramm genau das Gewicht des Körpers?

91. In der Wagschale einer Decimalwage hält ein Gewichtstein P dem auf der Brücke liegenden Gewichte Q das Gleichgewicht; bringt man aber Q in die Wagschale und P auf die Brücke, so sind p Kilogramm auf die Brücke zu legen, wenn Gleichgewicht eintreten soll. Welches Gewicht hat P und Q, wenn

1) p = 99; 2) p = 198; 3) p = 396; 4) p = 792

c) Rad an der Welle, Rolle, Flaschenzug.

92. Welche Kraft P hält an einem Haspel (Seite 72) einer Last Q das Gleichgewicht, wenn a die Länge der Kurbel und r der Radius der Welle in Centimetern ist, falls

1) Q = 86;	2) Q = 208;	3) Q = 195;	4) Q = 210
a = 9,0	a = 12	a = 15	a = 14
r = 2,7	r = 3	r = 2,8	r = 2,4

93. Welche Kraft P hält an einer Winde (Seite 75) einer Last Q das Gleichgewicht, wenn R der Radius des Ra-

des, r jener der Radwelle r_1 jener der Kurbelwelle und a die Kurbellänge in Centimetern ist, falls

1) R = 8; r = 2,8; r_1 = 3; a = 14; Q = 512
2) R = 7,5; r = 3,5; r_1 = 2,7; a = 19; Q = 475
3) R = 12,4; r = 3,2; r_1 = 3,2; a = 16; Q = 744
4) R = 13,5; r = 2,5; r_1 = 3; a = 15; Q = 648

94. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe der Radius des Rades zu nehmen, wenn ein Mann, der eine Kraft von 50 Kgr aufwenden kann, einer Last Q Gleichgewicht halten soll, falls

1) Q = 540; r = 4,0; r_1 = 3 ; a = 12 cm
2) Q = 780: r = 3,5; r_1 = 4 ; a = 13 „
3) Q = 1680; r = 2,5; r_1 = 3,2; a = 14 „
4) Q = 1305; r = 4,5; r_1 = 4 ; a = 15 „

95. Welche Last Q kann ein Mann mittelst eines Bauaufzuges (Seite 76) heben, wenn

1) R = 17,4; r = 3,2; r_1 = 3,9; a = 32 cm
2) R = 12,4; r = 3,5; r_1 = 3,1; a = 28 „
3) R = 14,8; r = 4,0; r_1 = 3,7; a = 27,2 „

96. In welchem Verhältnis steht die Kraft P zur Last Q wenn an einem Krahn die Radien der drei Wellen gleich groß und auch die Radien der beiden Räder der Kurbellänge gleich sind und außerdem die Kurbelwelle mit 12 und das davon getriebene Rad mit 114 Zähnen versehen ist?

97. Welche Kraft P hält an einer losen Rolle der Last Q das Gleichgewicht, wenn das an seinem einen Ende befestigte Seil den n^{ten} Teil des Umfanges der Rolle umspannt, im Falle

1) Q = 218; $n = \frac{1}{3}$
2) Q = 97; $n = \frac{1}{4}$
3) Q = 320; $n = \frac{1}{5}$
4) Q = 184; $n = \frac{1}{6}$

98. An einem Flaschenzuge trägt die bewegliche Flasche n Rollen. Welche Kraft P wird der Last Q Gleichgewicht halten, wenn

1) Q = 216; n = 1
2) Q = 512; n = 2
3) Q = 468; n = 3

99. Welche Last Q kann ein Mann mittelst eines Flaschenzuges heben, wenn das Seil 10 und die untere Flasche 16 Kilogramm wiegt, falls

1) n = 3; 2) n = 2; 3) n = 1;

100. Wieviele Arbeiter sind nötig, um mit dem vorigen Flaschenzug eine Last Q zu heben, wenn

1) Q = 284; 2) Q = 384
n = 3 n = 2

101. Ein Potenzflaschenzug bestehe aus n beweglichen Rollen; welche Kraft P hält der Last Q das Gleichgewicht, wenn jede Rolle 3 Kilogramm wiegt und

1) Q = 91; 2) Q = 415; 3) Q = 2355; 3) Q = 5347
n = 2 n = 3 n = 4 n = 5

102. Welche Last Q kann ein Mann mittelst des vorigen Zuges heben, wenn

1) n = 2; 2) n = 3; 3) n = 4; 4) n = 5

103. Wieviele Rollen muß ein Potenzflaschenzug haben, damit ein Mann die Last Q heben kann, wenn jede Rolle 3 Kilogramm wiegt und

1) Q = 1600; 2) Q = 6400; 3) Q = 832

d) Schiefe Ebene, Keil und Schraube.

104. Die Basis einer schiefen Ebene sei mit b (S. 77), die Höhe mit h und ihre Neigung gegen den Horizont mit α bezeichnet. Welche Kraft P hält der Last Q auf einer schiefen Ebene das Gleichgewicht, wenn P 1) der schiefen Ebene, 2) der Basis derselben parallel wirkt, im Falle

1) Q = 640; 2) Q = 312; 3) Q = 600; 4) Q = 408
h = 6 h = 5 h = 7 h = 15
b = 8 b = 12 b = 24 b = 8

105. Wie groß ist in der vorhergehenden Aufgabe der Druck D auf die schiefe Ebene?

106. Welche Kraft P hält der Last Q auf einer schiefen

Ebene das Gleichgewicht, wenn P 1) der schiefen Ebene, 2) der Basis parallel ist, im Falle

1) $Q = 351,6$; 2) $Q = 492,5$; 3) $Q = 590,7$; 4) $Q = 729.6$
$\alpha = 15^0 27'$, $\alpha = 23^0 41'$ $\alpha = 19^0 45'$ $\alpha = 17^0 39'$

107. Welchen Druck hat die Ebene in jedem Falle der vorhergehenden Aufgabe auszuhalten?

108. Welchen Wert nimmt P und D in der Aufg. 106 an, wenn die Richtung von P mit der schiefen Ebene einen Winkel $\beta = + 3^0 25'$, oder $\beta = - 3^0 25'$ macht?

109. Eine Kraft P, deren Richtung der schiefen Ebene parallel ist, hält einer Last Q das Gleichgewicht. Wie groß ist die Last Q und ihr Druck D auf die schiefe Ebene, wenn

1) $P = 47,8$; 2) $P = 395,9$; 3) $P = 531,6$; 4) $P = 627,5$
$\alpha = 9^0 26'$ $\alpha = 7^0 32'$ $\alpha = 15^0 22'$ $\alpha = 13^0 52'$

110. Wie groß ist die Last Q und ihr Druck D, wenn in der vorigen Aufgabe die Kraft der Basis parallel wirkt?

111. Wie groß ist die Neigung einer schiefen Ebene, auf welcher eine Last Q von einer zur schiefen Ebene parallelen Kraft P im Gleichgewicht gehalten wird, wenn

1) $P = 57,8$; 2) $P = 129,4$; 3) $P = 85,3$; 4) $P = 141,8$
$Q = 138,6$ $Q = 320,5$ $Q = 157,4$ $Q = 357,8$

112. Eine Last Q, welche von einer Kraft P auf einer schiefen Ebene im Gleichgewicht gehalten wird, übt einen Druck = D auf die Ebene. Wie groß ist P und Q, wenn P der schiefen Ebene parallel wirkt und

1) $D = 83,5$ 2) $D = 122,8$; 3) $D = 95,8$; 4) $D = 72,4$
$\alpha = 14^0 31'$ $\alpha = 21^0 27'$ $\alpha = 17^0 14'$ $\alpha = 19^0$

113. Wieviele Arbeiter können einen schweren Wagen vom Gewichte Q auf einer schiefen Ebene, deren Steigung*) a ist, am Herablaufen hindern, wenn

1) $Q = 4200$; 2) $Q = 7500$; 3) $Q = 6800$; 4) $Q = 6500$
$a = 0,02$ $a = 0,03$ $a = 0,034$ $a = 0,039$

---

*) Unter der Steigung versteht man das Verhältnis der Höhe zur Basis.

114. Ein Körper vom Gewichte Q wird auf einer glatten schiefen Ebene im Gleichgewicht gehalten durch eine Kraft P, welche mit dem Horizont den Winkel $\alpha = 45^0$ bildet. Wie groß ist der Elevationswinkel der schiefen Ebene, wenn $P = \frac{1}{3} Q$ sein soll?

115. Wie groß darf unter den in Nr. 114 gegebenen Umständen der Elevationswinkel der schiefen Ebene höchstens angenommen werden, wenn diese Ebene nicht glatt ist, sondern gegenüber dem Körper Q den Reibungskoeffizienten $f = 0{,}2$ besitzt?

116. Welches ist der kleinste Wert des Elevationswinkels, bei welchem unter den in Nr. 115 gegebenen Umständen noch Gleichgewicht besteht?

117. Welches ist nach Größe und Richtung die kleinste Kraft, mit welcher man einen Schlitten von Q Kilogramm Gewicht auf einer schiefen Ebene vom Elevationswinkel ε erhalten kann, wenn ε und der Reibungskoeffizient f die Werte haben

$\varepsilon = 45^0$, $\varepsilon = 45^0$, $\varepsilon = 20^0$, $\varepsilon = 11^0 18' 24''$

$f = 0$, $f = 0{,}3$, $f = 0{,}1$, $f = 0{,}2$

118. Ein freihängendes Gewicht Q hält dem Gewichte P mittelst eines über eine Leitrolle in D geführten Fadens auf einer schiefen Ebene LM von der Neigung α das Gleichgewicht. Bestimme den Winkel β, welchen der Faden DP mit LM macht, sowie den Druck D, welchen P auf LM ausübt, aus den Größen P, Q und α.

119. Eine Last Q soll mit Hülfe eines Haspels, dessen Kurbel = 48 und dessen Wellenradius = 8 Centimeter ist, über eine schiefe Ebene von der Neigung $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ gezogen werden. Bestimme die hiezu nötige Kraft P, wenn

1) $Q = 336$; 2) $Q = 360$; 3) $Q = 420$; 4) $Q = 960$

120. Ein vertikal stehender eingeklemmter gleichschenkeliger Keil von der Breite = b und Länge = h Centim. trägt auf

seinem Rücken eine Last = Q Kilogramm im Gleichgewicht. Wie groß ist der normale Seitendruck K, im Falle

1) Q = 390;	2) Q = 240;	3) Q = 510;	4) Q = 266
b = 2,6	b = 3,0	b = 3,4	b = 3,8
h = 8,4	h = 11,2	h = 14,4	h = 18,0

121. Wie groß ist der normale Seitendruck K, wenn in der vor. Aufg. der Reibungskoeffizient f = 0,25 und der Keil als größte Belastung Q Kilogr. zu tragen vermag, im Falle

1) Q = 2040; 2) Q = 1376; 3) Q = 3180; 4) Q = 1792

122. Zwischen zwei auf einander liegende Quader soll ein rechtwinkliger Keil von der Breite b und Länge h Centim. eingetrieben werden. Welche Kraft P ist zum Eintreiben erforderlich, wenn der Reibungskoeffizient f = 0,25 und Q das Gewicht des oberen Steines ist, im Falle

1) Q = 7225;	2) Q = 12769:	3) Q = 21025;	4) Q = 32761
b = 2,6	b = 3,0	b = 3,4	b = 3,8
h = 8,4	h = 11,2	h = 14,4	h = 18,0

123. Bei welchem Reibungskoeffizienten f würde in der vorigen Aufgabe der Keil dem Drucke nachgeben und zurückweichen?

124. Welchem in der Spindelachse wirkenden Drucke D kann ein Mann (50 Kil.) mit einer glatten flachgängigen Schraube, deren Ganghöhe = h und deren mittlerer Radius = r Centimeter ist, das Gleichgewicht halten, wenn durch den Schraubenkopf ein Hebel von 2a cm Länge gesteckt ist, an dessen Enden die Kräfte angreifen?

1) h = 1,2;	2) h = 0,9;	3) h = 0,9;	4) h = 0,6
r = 2,5	r = 2,8	r = 2,7	r = 1,8
a = 48	a = 42	a = 45	a = 27

125. Wie groß berechnet sich in der vorigen Aufgabe der Reibungswinkel, wenn die Reibung allein imstande sein soll, das Gleichgewicht herzustellen?

Anleitung. Die Reibung ist als eine Kraft einzuführen, welche dem Normaldrucke proportional ist und gegenüber

einer längs der schiefen Ebene der Schraubenmutter abwärts gehenden Bewegung als eine längs der schiefen Ebene aufwärts gerichtete Kraft wirkt. Sie ist nach der vertikalen und horizontalen Richtung zu zerlegen, und ihre beiden Komponenten sind den Komponenten des normalen Widerstandes beizugesellen. Die Größe des Reibungswinkels ergibt sich aus $\tang (\alpha - \varphi) = o$, wenn α den Steigungswinkel der Schraube bezeichnet ($\tang \alpha = \frac{h}{2 r \pi}$).

B. Aufgaben aus der Dynamik.

I. Gleichförmige Bewegung.

1. Welches ist die mittlere Geschwindigkeit eines Eilwagens, welcher s Kilometer in n Minuten zurücklegt, falls

1) s = 6,6;	2) s = 5,52;	3) s = 6,48;	4) s = 8,1
n = 50	n = 40	n = 45	n = 54

2. Welches ist die mittlere Stromgeschwindigkeit eines Flusses, wenn ein darin schwimmender Körper in n Minuten s Kilometer zurücklegt, falls

1) n = 20;	2) n = 30;	3) n = 25;	4) n = 15
s = 1,44	s = 1,62	s = 2,25	s = 0,72

3. Welches ist die lineare Geschwindigkeit (v) am Umfange und welches die Winkelgeschwindigkeit ω eines Rades vom Radius = r Meter, wenn sich dasselbe in 1 Minute 24 mal umdreht, falls

1) r = 1,5; 2) r = 0,75; 3) r = 1,2; 4) r = 2,5

4. Welches ist die mittlere Geschwindigkeit eines Eilzuges, welcher s Kilometer in 10 Minuten zurücklegt, wenn

1) s = 6,9; 2) s = 7,2; 3) s = 7,08; 4) s = 7,5

5. Wann und wo decken sich Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr?

6. In A geht ein gemischter Zug ab mit einer Geschwin-

digkeit = 7,8 Meter und nach 3 Stunden ein Eilzug, welcher ersteren in n Stunden einholen soll. Bestimme seine Geschwindigkeit v, wenn

1) n = 6; 2) n = 7,5; 3) n = 8; 4) n = 7,2

7. In A und B gehen gleichzeitig zwei Bahnzüge mit einer Geschwindigkeit von 8 und 12 Meter gegen einander ab. Nach welcher Zeit t werden sie sich begegnen, wenn die Entfernung AB = s Kilometer, falls

1) s = 396; 2) s = 360; 3) s = 252; 4) s = 216

8. Welche Entfernung s hat in der vorhergehenden Aufgabe A von B, wenn die Züge in t Stunden sich begegnen, falls

1) t = 3,5; 2) t = 3,8; 3) t = 4,2; 4) t = 4,5

9. In A geht ein Güterzug ab mit einer Geschwindigkeit = 8 Meter, $2\frac{1}{2}$ Stunden später in B ein Eilzug, welcher ersterem nach t Stunden begegnet. Bestimme die Geschwindigkeit v des letzteren aus AB = s Kilom., falls

1) s = 252;	2) s = 216;	3) s = 288;	4) s = 324
t = 2,5	t = 2	t = 3	t = 3,5

10. Wie lange braucht ein Lichtstrahl von der Sonne zur Erde, wenn die Geschwindigkeit des Lichtes 40000 und die Entfernung der Erde von der Sonne = $20\frac{1}{2}$ Millionen Meilen ist?

11. Wie lange braucht ein Lichtstrahl von einem Fixstern zur Erde, wenn er n mal $20\frac{1}{2}$ Millionen Meilen entfernt ist, falls

1) n = 36000; 2) n = 54000; 3) n = 72000; 4) n = 90000

12. Ein Dampfboot hat stromabwärts eine Geschwindigkeit = v_1 und stromaufwärts = v_2 Fuß. Bestimme die Stromgeschwindigkeit v des Flusses, so wie die Geschwindigkeit v', welche das Dampfboot in stehendem Wasser haben würde, wenn die Arbeit der Maschine in den drei Fällen als gleich vorausgesetzt wird und falls

1) $v_1 = 16$;	2) $v_1 = 17$;	3) $v_1 = 11$;	4) $v_1 = 16$
$v_2 = 8$	$v_2 = 11$	$v_2 = 4$	$v_2 = 6$

13. Ein Kahn sucht mit einer Geschwindigkeit = 6 Fuß senkrecht zur Strömung das jenseitige Ufer eines b Fuß breiten

Stromes zu gewinnen. Welches ist die Stromgeschwindigkeit v, wenn der Kahn bei der Landung s Fuß abwärts getrieben wurde, falls

1) b = 3120; 2) b = 2500; 3) b = 3580; 4) b = 3500
s = 1040   s = 1000   s = 1790   s = 2100

14. Ein Dampfboot hat erfahrungsgemäß stromabwärts eine Geschwindigkeit a = 5,2 m. In welcher Richtung muß dasselbe fahren, wenn es in t Sekunden auf dem kürzesten Wege über eine Strömung von 312 m Breite gelangen will, im Falle

1) t = 78;   2) t = 104;   3) t = 91;   4) t = 60

Wie groß ist in jedem Falle die Geschwindigkeit der Strömung und die eigene Geschwindigkeit des Bootes?

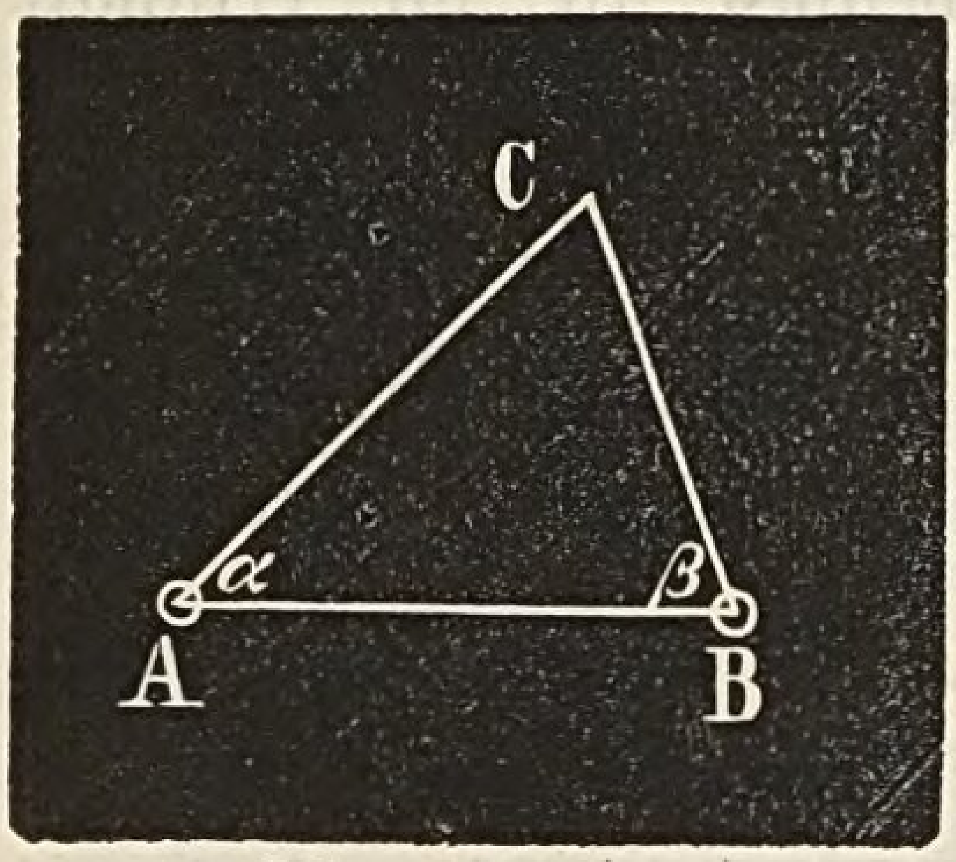


Fig. 45.

15. Zwei Punkte A und B (Fig. 50), welche eine Entfernung AB = b haben, bewegen sich in der Richtung AC und BC mit den Geschwindigkeiten v und v_1. Bestimme v_1 und die Zeit t, in der sie sich in C begegnen, wenn

1) v = 25*; b = 7480; $\alpha = 67^0$; $\beta = 79^0 30'$
2) v = 37 ; b = 8590; $\alpha = 90^0$; $\beta = 71^0 42'$
3) v = 48 ; b = 9260; $\alpha = 73^0$; $\beta = 69^0 52'$

16. Nach einem Orte A führen zwei gerade auf einander senkrechte Straßen AY und AX. Auf AX fährt N_1 von A weg mit der konstanten Geschwindigkeit v = 2 Meter und sieht den N_2 von Y her auf A zufahren. 10 Minuten nach seiner Abfahrt von A bemerkt N_1 mit Hilfe eines Kompasses, daß die nach N_2 gerichtete Sehlinie mit der Straße AX einen Winkel $\alpha = 75^0$ bildet, während 5 Minuten später dieser Winkel nur noch $\beta = 63^0$ beträgt. Wann kommt N_2 voraussichtlich in A an?

*) Ueberall, wo die Längeneinheit nicht beigesetzt ist, soll das Meter genommen werden.

II. Gleichförmig beschleunigte Bewegung.*)

17. Bestimme die Endgeschwindigkeit v und den Fallraum s, den ein freifallender Körper in t Sekunden zurücklegt, wenn $g = 9{,}8$ und

1) $t = 4{,}5$; 2) $t = 5{,}8$; 3) $t = 6{,}5$; 4) $t = 8$

18. In welcher Zeit t und mit welcher Endgeschwindigkeit v fällt ein Körper von der Höhe h, wenn $g = 9{,}8$ und

1) $h = 78{,}4$; 2) $h = 490$; 3) $h = 313{,}6$; 4) $h = 1960$

19. Ein Körper hat im freien Fall eine Geschwindigkeit $= v$ erlangt, welche Werte haben h und t, wenn $g = 9{,}8$ und

1) $v = 19{,}6$; 2) $v = 49$; 3) $v = 39{,}2$; 4) $v = 58{,}8$

20. Ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper gelangt nach t Sekunden zur Erde zurück; welches ist die erlangte Höhe h und welches die Wurfgeschwindigkeit v, wenn $g = 9{,}8$ und

1) $t = 12$; 2) $t = 16$; 3) $t = 20$; 4) $t = 24$

21. Mit welcher Geschwindigkeit v muß ein Körper senkrecht in die Höhe geworfen werden, um die Höhe h zu erreichen, wenn $g = 9{,}8$ und

1) $h = 160$; 2) $h = 250$; 3) $h = 360$; 4) $h = 490$

22. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit v senkrecht in die Höhe geworfen. Wie hoch steigt er und in welcher Zeit t gelangt er zur Erde, wenn $g = 9{,}8$ und

1) $v = 147$; 2) $v = 196$; 3) $v = 245$; 4) $v = 294$

23. Ein Körper gleitet ohne Reibung von der Ruhe aus mit einer Beschleunigung $= a$ über eine schiefe Ebene von der Länge $= s$. Welche Neigung α hat die Ebene gegen den Horizont und in welcher Zeit und mit welcher Endgeschwindigkeit kommt der Körper am Fuße derselben an, wenn $g = 9{,}8$ m und

1) $a = 2{,}8$;	2) $a = 4{,}2$;	3) $a = 4{,}9$	4) $a = 7$
$s = 315$	$s = 840$	$s = 2205$	$s = 2016$

24. Welche Steigung und Länge hat eine glatte schiefe

---

*) Als Beschleunigung wird $g = 9{,}8$ m vorausgesetzt, so lange nicht ein anderer Wert angegeben ist.

Ebene, über welche ein Körper mit der Beschleunigung a in der Zeit t gleitet, und welche Geschwindigkeit hat derselbe erlangt, wenn $g = 9,8$ m und

1) $a = 2,8$; 2) $a = 4,2$ 3) $a = 5,6$; 4) $a = 3,5$
$t = 25$ $t = 35$ $t = 45$ $t = 52$

25. Mit welcher Beschleunigung und in welcher Zeit gleitet ein Körper über eine schiefe Ebene von der Länge s und der Neigung α, wenn $g = 9,8$ m, der Reibungskoeffizient 0,1 und

1) $s = 551,25$; 2) $s = 267,75$; 3) $s = 1183$; 4) $s = 3430$
$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\sin\alpha = \frac{3}{14}$ $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ $\sin\alpha = \frac{4}{7}$

26. Ein Körper gleitet über eine glatte schiefe Ebene AB, deren Höhe $AC = 176,4$ m ist, in der Zeit t von A nach B abwärts; zu welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit passierte derselbe den Fußpunkt D des Lotes $CD \perp AB$, im Falle $g = 9,8$ m und

1) $t = 8$; 2) $t = 10$; 3) $t = 12$; 4) $t = 15$

27. In welcher Zeit t und mit welcher Geschwindigkeit v kommt in der vorhergehenden Aufgabe der Körper von A nach B, wenn er von D bis B die Zeit t_1 braucht, falls g und h unverändert bleiben und

1) $t_1 = 2$; 2) $t_1 = 3$; 3) $t_1 = 4$; 4) $t_1 = 5$

28. Welches ist die Neigung einer glatten schiefen Ebene, wenn ein über sie hinab gleitender Körper n mal soviel Zeit braucht, als im freien Falle von ihrer Höhe h, falls

1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 4$; 4) $n = 5$

29. In welcher Höhe h über dem Horizont fängt ein Körper über eine schiefe Ebene von der Neigung α zu gleiten an, wenn er in der Zeit t unten ankommt, im Falle der Reibungswinkel 5^0 beträgt und

1) $\alpha = 25^0 32'$; 2) $\alpha = 22^0 50'$; 3) $\alpha = 20^0 45'$; 4) $\alpha = 18^0$
$t = 8,7$ $t = 9,24$ $t = 10,8$ $t = 12$

30. Welche Geschwindigkeit muß ein Körper aufwärts längs einer glatten schiefen Ebene von der Neigung α besitzen, damit er eine Länge $= s$ erreiche, im Falle

1) $\alpha = 29^0 15'$; 2) $\alpha = 24^0 34'$; 3) $\alpha = 20^0 17'$; 4) $\alpha = 16^0$
$s = 73{,}5$ $s = 81{,}6$ $s = 89{,}2$ $s = 95$

31. Ein Körper besitzt eine Geschwindigkeit $= v_0$ längs einer glatten schiefen Ebene von der Neigung α aufwärts. Welche Länge s erreicht er, und nach welcher Zeit t kehrt er zurück, wenn

1) $\alpha = 27^0 33'$; 2) $\alpha = 25^0 40'$; 3) $\alpha = 18^0 24$; 4) $\alpha = 19^0$
$v_0 = 24{,}6$ $v_0 = 19{,}7$ $v_0 = 23{,}9$ $v_0 = 17^0$

32. Bestimme in der vorgehenden Aufgabe v_0 und s, wenn α und t (die Zeit der Rückkehr) gegeben ist, falls

1) $\alpha = 28^0$; 2) $\alpha = 24^0$; 3) $\alpha = 21^0$; 4) $\alpha = 15^0$
$t = 12$ $t = 10$ $t = 13$ $t = 14$

33. Ein Körper gleitet von der Ruhe aus über eine glatte schiefe Ebene von A gegen B abwärts; gleichzeitig bewegt sich ein zweiter Körper von B gegen A hin so, daß beide Körper im Augenblicke der Begegnung gleiche Geschwindigkeit haben. Beweise, daß ihre Wege sich verhalten wie 1 : 3.

34. Welche Geschwindigkeit und welchen Fallraum erreicht an der Atwood'schen Fallmaschine das Gewicht P in der Zeit $t = 3$ Sekunden, wenn $g = 9{,}8$ m und

1) $P = 1{,}32$; 2) $P = 1{,}43$; 3) $P = 1{,}54$; 4) $P = 1{,}65$
$Q = 1{,}08$ $Q = 1{,}17$ $Q = 1{,}26$ $Q = 1{,}35$

35. Wie groß ist an der Atwoodschen Fallmaschine die bewegte Masse, wenn durch ein Übergewicht p in der Zeit t der Fallraum $s = 3{,}5$ m zurückgelegt wird, im Falle

1) $p = 1{,}4$ gr 2) $p = 1{,}4$ gr 3) $p = 0{,}7$ gr 4) $p = 0{,}14$ gr
$t = 9$ $t = 12$ $t = 16$ $t = 20$

36. Auf einer horizontalen Ebene wird eine ohne Reibung bewegliche Last Q von dem freihängenden Gewichte P mittelst einer Schnur in Bewegung gesetzt. Bestimme v und s für die Zeit $t = 4$ Sekunden, wenn $g = 9{,}8$ m und

1) $P = 1{,}5$; 2) $P = 2{,}4$; 3) $P = 2{,}8$; 4) $P = 2{,}9$
$Q = 13{,}5$ $Q = 21{,}6$ $Q = 25{,}2$ $Q = 26{,}1$

37. In welchem Verhältnis sind in der vorhergehenden Aufgabe P und Q zu nehmen, damit die Beschleunigung $= a$ werde, im Falle

1) $a = 1{,}4$ 2) $a = 2{,}45$; 3) $a = 4{,}2$; 4) $a = 4{,}9$

38. In welcher Zeit wird ein freihängendes Gewicht P eine Last Q (Fig. 32) über eine glatte schiefe Ebene, deren Steigung $\sin \alpha = \frac{1}{14}$ und Länge $s = 120$ m ist, hinaufziehen, wenn $g = 9{,}8$ m und

1) $P = 1{,}36$; 2) $P = 2{,}76$; 3) $P = 10{,}32$; 4) $P = 12{,}07$
$Q = 15{,}44$ $Q = 35{,}04$ $Q = 140{,}88$ $Q = 168{,}98$

39. In welcher Zeit wird eine Last Q über eine glatte schiefe Ebene von der Neigung β und Länge $s = 50$ m von einem Gewichte P, welches gezwungen ist, auf einer zweiten glatten schiefen Ebene von der Neigung α zu bleiben, empor gezogen werden, wenn $g = 9{,}8$ m, $\sin \alpha = \frac{3}{7}$, $\sin \beta = \frac{3}{28}$ und

1) $P = 52$; 2) $P = 20{,}9$; 3) $P = 17{,}8$; 4) $P = 10{,}9$
$Q = 158$ $Q = 73{,}6$ $Q = 66{,}2$ $Q = 41{,}6$

40. Mit welcher Geschwindigkeit v kommt in der vorhergehenden Aufgabe Q oben an?

41. In welcher Höhe h über dem Horizont befindet sich Q in Aufgabe 39 nach t Sekunden, wenn

1) $t = 16{,}8$; 2) $t = 25{,}2$; 3) $t = 22{,}4$; 4) $t = 35$.

42. Ein Zug, welcher auf horizontaler Bahn mit einer Geschwindigkeit $= 10{,}8$ m fährt, hat eine Steigung $\sin \alpha = \frac{1}{140}$ zu passieren. Welche Geschwindigkeit hat er nach t Sekunden, wenn sowohl die Dampfkraft als die Widerstände der Reibung und der Luft gleich bleiben und

1) $t = 120$; 2) $t = 90$; 3) $t = 130$; 4) $t = 85$.

43. Welche Geschwindigkeit wird der Zug in der vorhergehenden Aufgabe erreichen, wenn er unter denselben Umständen abwärts fährt?

44. Wie verhalten sich die Höhen zweier glatten schiefen

Ebenen, wenn ein Körper über beide in derselben Zeit hinabgleiten soll?

45. Ein unelastischer Körper gleitet über eine schiefe Ebene von der Länge s und Neigung α, und gelangt von da auf eine zweite unelastische Ebene von der Länge s_1 und Neigung β. In welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit erreicht die Kugel das Ende der zweiten Ebene, wenn

1) $s = 12$;	2) $s = 15$;	3) $s = 25$;	4) $s = 21$
$\alpha = 16^0$	$\alpha = 14^0$	$\alpha = 9^0$	$\alpha = 17^0$
$s_1 = 22$	$s_1 = 19$	$s_1 = 17$	$s_1 = 18$
$\beta = 10^0$	$\beta = 8^0$	$\beta = 0^0$	$\beta = 13^0$

46. Welche Werte nimmt Zeit und Geschwindigkeit an, wenn in der vorhergehenden Aufgabe an die Stelle der zwei Ebenen zwei gleiche Sehnen AB = BC eines vertikalen Kreises vom Radius r in der Weise treten, daß C der tiefste Punkt des Kreises und Bogen AC = $\frac{1}{2}r\pi$ ist, im Falle

1) $r = 18$; 2) $r = 13$; 3) $r = 9$; 4) $r = 24$.

47. Bestimme Zeit und Geschwindigkeit, mit welcher ein unelastischer schwerer materieller Punkt die drei auf einander folgenden Seiten eines regulären Zwölfeckes durchläuft, wenn der letzte Punkt zugleich der tiefste des umgeschriebenen vertikalen Kreises ist, und der Radius des Kreises

1) $r = 15$; 2) $r = 27$; 3) $r = 38$; 4) $r = 29$.

48. Ein unelastischer Stein fällt 40 Meter vom Turme auf das Dach einer Kirche, gleitet über dasselbe mit einem Reibungskoeffizienten 0,25 und fällt dann noch einmal 20 Meter. In welcher Zeit kommt er auf dem Boden an, wenn das Dach 30 Meter lang ist und eine Neigung = 60^0 hat?

49. Welches ist die Tiefe h einer Höhle, wenn man einen hinabfallenden Stein erst nach t Sekunden auffallen hört, falls die Schallgeschwindigkeit = 333 m, g = 9,8 m und

1) $t = 4\frac{1}{4}$; 2) $t = 6\frac{9}{16}$; 3) $t = 9$; 4) $t = 20$

50. Wie groß berechnet sich die Fallbeschleunigung, wenn

man einen Stein in einem h Meter tiefen Schacht nach t Sekunden auffallen hört, und

1) h = 313,92; 2) h = 78,48; 3) h = 176,58; 4) h = 490,5
t = 9   t = $4\frac{1}{4}$ t = $6\frac{9}{16}$ t = $11\frac{9}{16}$

III. Wurfbewegung.

51. Auf der Spitze eines Berges, der sich h Meter über den Spiegel eines Sees erhebt, wird eine Büchse horizontal losgeschossen. Wann und wo erreicht die Kugel den Wasserspiegel, wenn sie den Lauf der Büchse mit einer Geschwindigkeit = 350 m verläßt, im Falle*) g = 9,8 m und

1) h = 176,4; 2) h = 313,6; 3) h = 490; 4) h = 1760

52. Wo befindet sich in der vorhergehenden Aufgabe die Kugel nach Verlauf von 5 Sekunden?

53. Mit welcher Geschwindigkeit wird in einer Höhe h über dem Horizont ein Stein horizontal geschleudert, wenn er beim Niederfallen eine Wurfweite = x erreicht, falls g = 9,8 m und

1) h = 40; 2) h = 90; 3) h = 160; 4) h = 250
x = 42   x = 84   x = 140   x = 210

54. Wie tief sinkt eine mit 350 m Geschwindigkeit horizontal abgeschossene Büchsenkugel auf eine Entfernung = x, wenn g = 9,8 und

1) x = 70; 2) x = 175; 3) x = 210; 4) x = 350.

55. Wie groß berechnet sich t und die Wurfgeschwindigkeit v_0 eines horizontal geworfenen Körpers, wenn er auf eine Entfernung x um y Meter sinkt, im Falle g = 9,8 und

1) x = 24; 2) x = 45; 3) x = 50; 4) x = 48
y = 0,196   y = 0,441   y = 0,784   y = 1,764

56. Ein materieller Punkt durchfällt den Bogen eines vertikalen Quadranten und verläßt denselben an seinem tiefsten Punkte mit horizontaler Geschwindigkeit. Wo befindet sich der

*) Der Widerstand der Luft wird hier wie in allen folgenden Beispielen außer Acht gelassen.

Punkt, nachdem er 2 Sekunden frei gefallen ist, wenn der Radius des Quadranten

1) $r = 6{,}4$; 2) $r = 1{,}6$; 3) $r = 3{,}6$; 4) $r = 10$.

57. Angenommen, die Erde sei in Ruhe und fange in dem Augenblicke zu rotieren an, in welchem ein Stein von einem h Meter hohen Turme zu fallen beginnt. Wo wird der Stein niederfallen, wenn die Rotationsgeschwindigkeit der Erde am Fuße des Turmes 464 m beträgt und

1) $h = 100$; 2) $h = 121$; 3) $h = 115$; 4) $h = 144$.

58. Welche Abweichungen vom lotrechten Falle wird in der vorhergehenden Aufgabe der Stein in Wirklichkeit zeigen, wenn der Radius der Erde $r = 6380315$ m ist?

59. Welche Wurfhöhe h und Wurfweite w erreicht eine Kanonenkugel, welche mit einer Geschwindigkeit v_0 unter einem Elevationswinkel $= \alpha$ abgeschossen wird, im Falle

1) $v_0 = 540$; 2) $v_0 = 550$; 3) $v_0 = 560$; 4) $v_0 = 570$
$\alpha = 12^0$ $\alpha = 14^0$ $\alpha = 15^0$ $\alpha = 17^0$

60. Welches ist die Wurfgeschwindigkeit v_0 und der Elevationswinkel α einer Geschützkugel, welche in t Sekunden eine Wurfweite w erreicht, wenn

1) $t = 20{,}4$; 2) $t = 21{,}6$; 3) $t = 22{,}7$; 4) $t = 23{,}6$
$w = 9780$ $w = 9570$ $w = 9240$ $w = 8950$

61. Unter welchem Elevationswinkel α wird die Wurfweite w n mal so groß, als die Wurfhöhe h, im Falle

1) $n = 4$; 2) $n = 8$; 3) $n = 12$; 4) $n = 16$

62. Wie groß muß der Elevationswinkel α genommen werden, damit eine Geschützkugel die größte Höhe h bei einer Wurfgeschwindigkeit v_0 erreicht, wenn

1) $h = 2450$; 2) $h = 1830$; 3) $h = 1670$; 4) $h = 1490$
$v_0 = 532$ $v_0 = 548$ $v_0 = 554$ $v_0 = 562$

63. Welches ist in der vorhergehenden Aufgabe die Wurfweite w der Kugel?

64. Ein geworfener Gegenstand hat im Augenblick seiner größten Höhe h eine Bahngeschwindigkeit $= v$. Welches ist der

Elevationswinkel α, die Wurfgeschwindigkeit v_0, die Wurfweite w, wenn

1) $h = 2680$; 2) $h = 2730$; 3) $h = 2790$; 4) $h = 2820$
$v = 485$ $\quad v = 472$ $\quad v = 463$ $\quad v = 458$

65. Welches ist der Richtungswinkel des Rohres einer Kanone, damit die Kugel bei einer Geschwindigkeit $= v_0$ Meter einen bestimmten Zielpunkt treffe, wenn dessen horizontale Entfernung $= x$ und senkrechte Erhebung über den Horizont $= y$ gegeben ist, im Falle $g = 9{,}8$ und

1) $v_0 = 490$; 2) $v_0 = 520$; 3) $v_0 = 510$; 4) $v_0 = 500$
$x = 1176$ $\quad v = 1440$ $\quad x = 1800$ $\quad x = 1920$
$y = 837{,}9$ $\quad y = 555{,}9$ $\quad x = 881{,}6$ $\quad y = 481{,}6$

66. Ein unter dem Winkel $\alpha = 16^0\,15'\,36{,}73''$ mit der Geschwindigkeit $= v_0$ Meter geworfener Körper hat nach einer gewissen Zeit die horizontale Entfernung x erreicht. Bestimme die entsprechende Zeit t und die Höhe y, wenn $g = 9{,}8$ und

1) $v_0 = 350$; 2) $v_0 = 400$; 3) $v_0 = 450$; 4) $v_0 = 500$
$x = 2016$ $\quad x = 1920$ $\quad x = 1728$ $\quad x = 1440$

67. Am Fuße einer schiefen Ebene von der Neigung α und Länge $AB = s$, welche den Horizont in AH schneidet, besitzt ein Körper eine Geschwindigkeit v_0 in der Richtung $AB \perp AH$. Derselbe gleitet ohne Reibung über die schiefe Ebene, verläßt diese in B, beschreibt von da eine Parabel und fällt in C auf den Horizont. Bestimme die größte Erhebung h über den Horizont, die Entfernung $AC = x$ und die Dauer t der Bewegung, wenn $g = 9{,}8$ m und

1) $s = 88{,}2$; 2) $s = 191{,}1$; 3) $s = 323{,}4$; 4) $s = 117{,}6$
$v_0 = 49$ $\quad v_0 = 68{,}6$ $\quad v_0 = 68{,}6$ $\quad v_0 = 49$
$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad \sin\alpha = \frac{1}{3}$ $\quad \sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad \sin\alpha = \frac{2}{3}$

68. Welche Höhe h' würde die Kugel in der vorhergehenden Aufgabe in dem Augenblicke erreicht haben, in welchem sie die Ebene verläßt, wenn sie bei unverändertem v_0 und α frei geworfen worden wäre?

69. In einer schiefen Ebene von der Neigung α, welche den Horizont in AH schneidet, wird in der Richtung AB eine Kugel mit der Geschwindigkeit v_0 geworfen. Wann und in welcher Entfernung x von A erreicht sie den Horizont wieder, wenn $\angle$ BAH $= \beta$, $g = 9{,}8$ m und

1) $v_0 = 19{,}6$; 2) $v_0 = 29{,}4$; 3) $v_0 = 24{,}5$; 4) $v_0 = 39{,}2$
$\alpha = 32^0$ $\alpha = 28^0$ $\alpha = 27^0$ $\alpha = 25^0$
$\beta = 58^0$ $\beta = 62^0$ $\beta = 63^0$ $\beta = 65^0$

70. Welches ist in der vorhergehenden Aufgabe die größte Entfernung h von AH (Scheitel der Parabel), und wie hoch liegt dieser Punkt über dem Horizont?

IV. Centralbewegung. Pendel.

71. Welches ist die Geschwindigkeit eines Punktes am Äquator der Erde und in der geographischen Breite φ, wenn der Erdradius = 6380315 Meter und die Zeit einer vollen Umdrehung $= 23^h 56' 4'' = 86164''$ mittlere Zeit ist, im Falle

1) $\varphi = 34^0 19'$; 2) $\varphi = 39^0 52'$; 3) $\varphi = 45^0 32'$;
4) $\varphi = 51^0 48'$

72. Wie groß muß der Durchmesser eines Mühlsteins genommen werden, wenn er in 1 Minute 100 Umläufe machen soll, damit die Umfangsgeschwindigkeit = v Meter werde, im Falle

1) $v = 7{,}6$; 2) $v = 7{,}4$; 3) $v = 7{,}2$; 4) $v = 7$

73. Welches ist die mittlere Bahngeschwindigkeit der Erde, wenn der Bahnradius $= 20\frac{1}{2}$ Millionen Meilen ist und die Umlaufszeit 365,24 Tage beträgt?

74. Um wieviel übertrifft die Bahngeschwindigkeit der Erde ihre Rotationsgeschwindigkeit am Äquator?

75. Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde ist = 60 Erdhalbmessern à 6380315 m, die Umlaufszeit = 27,3 Tage. Bestimme die mittlere Bahngeschwindigkeit desselben?

76. Welches ist die Centripetalbeschleunigung des Punktes in der Aufgabe 71?

77. Welches ist die Centripetalbeschleunigung der Erde bei ihrer Bewegung um die Sonne und die des Mondes bei seiner Bewegung um die Erde nach den Angaben in 73 und 75?

78. Welches würde die Centrifugalbeschleunigung eines Punktes am Äquator sein, wenn (nach 71) t die Dauer einer Umdrehung wäre, im Falle

1) $t = 12^h$; 2) $t = 6^h$; 3) $t = 4^h$; 4) $t = 2^h$

79. Welche Ausdehnung müßte die Erde annehmen, damit bei unveränderter Rotationszeit und Masse ein Punkt am Äquator kein Gewicht mehr hätte?

80. Mit welcher Geschwindigkeit müßte die Erde rotieren, damit die in 79 angenommene Wirkung eintrete?

81. Mit welcher Beschleunigung a und a_1 würden Erde und Mond sich zu nähern anfangen, wenn sie in Ruhe wären und keine andere Masse als ihre eigenen einwirkten, die Masse des Mondes $= \frac{1}{80}$ der Erde genommen?

82. Die beobachtete Beschleunigung der Schwere an einem Orte der Erdoberfläche von der geogr. Breite φ ist die Differenz aus der absoluten Beschleunigung G und der Komponente $a \cos \varphi$ der Centrifugalbeschleunigung a. Wie groß berechnet sich die Beschleunigung in der geographischen Breite φ, wenn jene in der Breite von $48^0 50' 14''$ einen Wert $g = 9,80896$ m hat, unter der Annahme, daß die Erde eine Kugel sei, im Falle

1) $\varphi = 0^0$; 2) $\varphi = 37^0 42'$; 3) $\varphi = 41^0 25'$; 4) $\varphi = 46^0 30'$

83. In welcher Entfernung h von der Erdoberfläche ist die Schwerkraft der Erde gleich der Schwungkraft in der Äquatorebene?

84. Wie groß berechnet sich die Centripetalbeschleunigung a einer Kreisbewegung aus dem Radius r und der Umlaufszeit t, wenn

1) $r = 6,4$; $t = 2,5$
2) $r = 5,4$; $t = 3,8$
3) $r = 7,2$; $t = 4$
4) $r = 10$; $t = 5,6$

85. Ein an einem Faden von der Länge l hängender

schwerer Punkt hat in horizontaler Richtung die Geschwindigkeit v_0. Welche Höhe h und welche Entfernung von seinem Ausgangspunkte erreicht er, wenn g = 9,8 m und

1) $v_0 = 19{,}6$; 2) $v_0 = 19{,}6$; 3) $v_0 = 9{,}8$; 4) $v_0 = 29{,}4$
$l = 39{,}2$ $l = 14{,}7$ $l = 4{,}9$ $l = 24{,}5$

86. Die Umlaufszeiten der Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn betragen beziehungsweise 87,9; 224,7; 686,9; 4332,6; 10759,2 Tage. Welches sind ihre Entfernungen von der Sonne, wenn die des Merkur zur Einheit angenommen wird?

87. Welches ist die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels von der Länge l, wenn g = 9,8 m und

1) $l = 3{,}528$; 2) $l = 6{,}272$; 3) $l = 2{,}45$; 4) $l = 1{,}568$

88. Welches ist die Länge l eines math. Pendels, wenn dasselbe in 17 St. 27 M. 11,8 Sek. n Schwingungen macht, falls g = 9,8 m und

1) $n = 40000$; 2) $n = 35000$; 3) $n = 28000$; 4) $n = 25000$

89. Wie groß berechnet sich die Beschleunigung g der Schwerkraft, wenn ein Pendel von der Länge l in 10000 Sek. n Schwingungen macht, im Falle

1) $n = 7957{,}75$; 2) $n = 6366{,}2$; 3) $n = 5305{,}17$;
$l = 1{,}568$ $l = 2{,}45$ $l = 3{,}528$
4) $n = 4547{,}29$; $l = 4{,}802$

90. Die Länge des Sekundenpendels in München und am Äquator ist beziehungsweise 0,99429 und 0,98245 m. Wie groß berechnet sich in beiden Fällen die Beschleunigung g?

91. Ein Pendel macht in einer gewissen Zeit am Fuße eines Berges n Schwingungen, auf der Spitze desselben n_1 Schwingungen. Welches ist die Höhe h des Berges, wenn der Erdradius r = 6380000 m und

1) $n = 5001$; 2) $n = 9002$; 3) $n = 12003$; 4) $n = 16004$
$n_1 = 5000$ $n_1 = 9000$ $n_1 = 12000$ $n_1 = 16000$

92. Auf der Spitze eines 10925 Fuß hohen Berges macht ein Pendel in einer gewissen Zeit 4000, am Fuße des-

selben 4002 Schwingungen in derselben Zeit. Wie groß berechnet sich hieraus der Erdradius?

93. Ein Pendel, welches in Paris 86400 Schwingungen macht, schwingt am Äquator in derselben Zeit nur 86274 mal. Wie groß berechnet sich hieraus die Beschleunigung am Äquator, da jene von Paris 9,80896 m beträgt?

94. Welche Entfernung vom Erdmittelpunkt hat Paris nach den Angaben der vorigen Aufgabe, wenn der Radius des Äquators = 6377390 m ist und die Schwungkraft unberücksichtigt bleibt?

95. Wie viel Schwingungen macht ein Pendel von der Länge l in 5 St. 14 M. 9,5 Sek. und um wie viele Schwingungen wird dasselbe in dieser Zeit zurückbleiben, wenn sich l durch Einfluß der Wärme um den 3000. Teil ausdehnt, im Falle g = 9,8 m und

1) l = 2,45; 2) l = 3,528; 3) l = 6,272; 4) l = 39,2

96. Ein Pendel, welches im Orte A Sekunden schlägt, macht innerhalb 24 Sekunden in B m Schwingungen weniger als in A. Um wieviel ist das Pendel zu verkürzen, damit es den früheren Gang einhalte, wenn l = 1 m und

1) m = 200; 2) m = 250; 3) m = 300; 4) m = 350

97. Eine Pendeluhr, deren Gangwerk für ein Sekundenpendel konstruiert ist, geht täglich um m Minuten zu spät. Durch welche Änderung der Pendellänge l kann dieser Fehler beseitigt werden, wenn l = 1 m und

1) m = 2,5; 2) m = 1,8; 3) m = 2,9; 4) m = 3,5

98. Wird ein Pendel so in Schwingung gebracht, daß der schwingende Punkt stets denselben horizontalen Kreis beschreibt, so heißt dasselbe Centrifugalpendel. Bestimme die Zeit t einer vollen Schwingung aus der Länge l und dem Ausschlagwinkel β!

Anleitung. Man setze den für die Centripetalkraft gefundenen allgemeinen Wert der nach dem Mittelpunkte gerichte-

ten Resultante aus der Spannung des Fadens und der Schwere des schwingenden Punktes gleich.

99. Der Watt'sche Regulator (Centrifugal-Regulator) ist eine Vorrichtung an Dampfmaschinen, um den Gang derselben zu regulieren. Derselbe trägt an zwei Stäben nach zwei Seiten hin Kugeln, die analog dem Centrifugalpendel um eine feste vertikale Achse rotieren und mit der Rotationsgeschwindigkeit sich heben und senken. Sei 0,4″ die gewöhnliche Umdrehungszeit: wieviel beträgt die lotrechte Hebung oder Senkung, wenn g = 9,8 m und die Umdrehungszeit t ist, im Falle

1) t = 0,35; 2) t = 0,38; 3) t = 0,44; 4) t = 0,48.

100. Ein Eisenbahnwagen bewegt sich in einer Krümmung deren Radius = r ist, mit einer Geschwindigkeit v = 10 Meter. Um wie viel muß die äußere Schiene höher liegen als die innere, damit der Wagen durch die Centrifugalkraft nicht aus dem Geleise geschleudert werde, wenn die Spurweite = 1,496 m, und g = 9,8 m ist, im Falle

1) r = 122,4; 2) r = 166,6; 3) r = 340; 4) r = 274,85.

V. Größe und mechanische Arbeit der Kräfte, Druck, Spannung, Reibung, Stoß.

101. Wie groß ist die Kraft P, welche einem Körper vom Gewichte Q = 49 Kilogramm auf einer horizontalen glatten Ebene die Beschleunigung a erteilt, wenn g = 9,8 m und

1) a = 4; 2) a = 6,4; 3) a = 5,8; 4) a = 9,8.

102. Wie groß ist der Druck einer elastischen Feder, welche einer frei beweglichen Masse vom Gewichte Q die Beschleunigung a = 7,35 m zu erteilen vermag, wenn g = 9,8 m und

1) Q = 52; 2) Q = 56; 3) Q = 60; 4) Q = 84.

103. Ein Wagen vom Gewichte Q = 1960 Kilogramm bewegt sich horizontal mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0 = 1,5 m. Welche Kraft P ist anzuwenden, um diese Geschwindigkeit in der Zeit t bis zum Werte v zu erhöhen, wenn g = 9,8 m und

1) $v = 3{,}5$; 2) $v = 4{,}5$; 3) $v = 5{,}5$; 4) $v = 6{,}5$
$t = 20$ $t = 30$ $t = 40$ $t = 50$

104. Welches ist in der vorhergehenden Aufgabe die Kraft P, wenn der Weg s anstatt der Zeit t gegeben ist, im Falle die übrigen Größen dieselben bleiben, und

1) $s = 50$; 2) $s = 60$; 3) $s = 70$; 4) $s = 80$.

105. Ein Wagen vom Gewichte $Q = 1568$ Kilogramm, welcher sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 1{,}2$ m bewegt, soll von einer Kraft $P = 80$ Kilogramm auf die Geschwindigkeit v gebracht werden. In welcher Zeit t wird dies geschehen und welchen Weg s wird der Wagen unterdessen zurücklegen, wenn $g = 9{,}8$ m und

1) $v = 2{,}5$; 2) $v = 3{,}2$; 3) $v = 4{,}8$; 4) $v = 5{,}6$.

106. Welche Geschwindigkeit v wird ein Wagen vom Gewichte $Q = 2000$ Kilogramm, welcher sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 1{,}4$ m bewegt, nach Aufnahme einer mechanischen Arbeit $= A$ haben, wenn $g = 9{,}8$ m und

1) $A = 600$; 2) $A = 1050$; 3) $A = 1600$; 4) $A = 2250$.

107. Ein Körper vom Gewichte $Q = 4{,}2$ Kilogr. wird von einer Kraft P auf die vertikale Höhe h geschleudert, während P nur eine Hubhöhe $s = 0{,}6$ m hat. Wie groß ist P, wenn

1) $h = 6{,}5$; 2) $h = 8{,}4$; 3) $h = 9{,}8$; 4) $h = 10{,}4$.

108. Welche mechanische Arbeit hat ein Schwungrad vom Trägheitsmomente*) 147 Kilogr. verrichtet, während seine Winkelgeschwindigkeit v_0 sich auf v vermindert hat, im Falle

1) $v_0 = 18$; 2) $v_0 = 16$; 3) $v_0 = 15$; 4) $v_0 = 14$
$v = 3{,}2$ $v = 2$ $v = 2{,}6$ $v = 3$

109. Wie groß berechnet sich der mittlere Widerstand R eines Erdwalles, wenn eine 6 Kilogr. schwere und mit 490

---

*) Das Trägheitsmoment ist diejenige Masse, welche in der Entfernung 1 (m) von der Drehungsachse durch eine Arbeit die gleiche Winkelbeschleunigung erhält wie die wirkliche Masse des rotierenden Körpers.

Meter Geschwindigkeit abgeschossene Kanonenkugel s Meter tief eindringt, falls $g = 9{,}8$ m und

1) $s = 0{,}5$; 2) $s = 0{,}3$; 3) $s = 0.21$; 4) $s = 0{,}35$

110. Auf ein Mühlrad fallen in jeder Sekunde n Kubikfuß Wasser à 25 Kilogr. von einer Höhe = h Meter. Wieviel Pferdekräfte repräsentiert diese Wasserkraft, wenn

1) $n = 60$; 2) $n = 70$; 3) $n = 64$; 4) $n = 80$
$h = 1{,}4$ $h = 1{,}5$ $h = 1{,}8$ $h = 1{,}2$

111. Welche mechanische Arbeit verrichtet ein Pochstempel in 1 Stunde, wenn derselbe ein Gewicht $Q = 30$ Kilogr., eine Hubhöhe = h hat und in 1 Minute n mal niederfällt, falls

1) $h = 0{,}5$; 2) $h = 1$; 3) $h = 0{,}8$; 4) $h = 0{,}6$
$n = 40$ $n = 30$ $n = 50$ $n = 25$

112. Ein Kolben vom Durchmesser = 0,24 m eines Dampfcylinders macht bei einer Hublänge = 0,3 m in 1 Minute n Wechsel (Hin- und Hergänge.) Welche mechanische Arbeit verrichtet der Kolben während dieser Zeit, wenn die Spannkraft des Dampfes einen Druck von Q Kilogr. auf eine Fläche = 0,1 □ m ausübt, im Falle

1) $n = 180$; 2) $n = 170$; 3) $n = 160$; 4) $n = 150$
$Q = 1000$ $Q = 900$ $Q = 850$ $Q = 800$

113. Ein Wasserrad, auf welches in jeder Sekunde n Kubikfuß Wasser à 25 Kilogr. von einer Höhe = 1,4 m fallen, hebt eine Last Q in 12 Minuten auf eine vertikale Höhe = h. Wie groß berechnet sich die nützliche Arbeit A_1 und die verlorene A_2, wie groß der Wirkungsgrad e der Maschine, wenn

1) $n = 15$; 2) $n = 20$; 3) $n = 25$; 4) $n = 30$
$h = 60$ $h = 80$ $h = 90$ $h = 70$
$Q = 5670$ $Q = 5040$ $Q = 5950$ $Q = 8910$

114. Welches ist in Aufgabe 38 die nützliche und verlorene Arbeit, welches der Wirkungsgrad der Maschine, wenn unter denselben Umständen die Last Q in der nämlichen Zeit infolge von Reibung nur eine Strecke von s Meter emporgezogen wird, im Falle

1) $s = 70$; 2) $s = 80$; 3) $s = 90$; 4) $s = 100$.

115. Auf einer horizontalen glatten Ebene befindet sich an dem einen Ende eines Fadens von der Länge l eine Kugel vom Gewichte Q, während das andere Ende befestigt ist. Welche Spannung erleidet der Faden, wenn die Kugel in der Richtung der Tangente so geschleudert wird, daß sie in 22 Sek. 7 Umläufe macht, im Falle g = 9,8 m, $\pi = \frac{22}{7}$ und

1) Q = 1,4; 2) Q = 2,8; 3) Q = 4,2; 4) Q = 5,6
l = 3,5 l = 1,75 l = 2,8 l = 1,4

116. Welche Spannung S erleidet ein Faden in der Aufgabe 34?

117. Bestimme die Spannung S in Aufg. 36.

118. Bestimme die Spannung S in Aufg. 38.

119. Bestimme die Spannung S in Aufg. 39.

120. Welche Spannung hat eine Schnur, an der eine Last Q mittelst einer Leitrolle mit einer Beschleunigung = 0,7 m von einem Arbeiter aufwärts und abwärts bewegt wird, im Falle

1) Q = 14,7; 2) Q = 19,6; 3) Q = 24,5; 4) Q = 29,4

121. Welches ist die größte und kleinste Spannung eines Fadens, an dessen unterem Ende ein schwerer Punkt von Q Kilogr. unter einem Ausschlagwinkel $\beta = 60^0$ in einer vertikalen Ebene schwingt, im Falle

1) Q = 1,5; 2) Q = 2,4; 3) Q = 3,2; 4) Q = 3,7

122. An einem Wellrade mit horizontaler Achse wird eine Last Q von dem Gewichte P emporgezogen. Bestimme die Spannung S_1 und S_2 der beiden Seile, wenn g = 9,8 m, R = 1,4 m, r = 0,2 m und

1) P = 175; 2) P = 140; 3) P = 70; 4) P = 35
Q = 1029 Q = 823,2 Q = 411,6 Q = 205,8

123. Bei einem Bahnzuge, der mit einer konstanten Geschwindigkeit = 9 m fährt, haben die Kuppelketten eines 4900 Kilogr. schweren Wagens eine Spannung = 240 Kilogramm. Welche Spannung haben die Ketten, während durch vermehrten

Dampfdruck auf einer Strecke = s die Geschwindigkeit auf v anwächst, im Falle

1) s = 500; 2) s = 400; 3) s = 350; 4) s = 300
v = 11 v = 11,4 v = 11,8 v = 12

124. Welche Spannung würden die Ketten eines Wagens vom Gewichte Q = 2500 Kilogr. in der vor. Aufgabe erleiden, wenn der Zug mit unveränderter Geschwindigkeit eine schiefe Ebene von der Steigung sin α passieren würde, im Falle die Spannung während der horizontalen Fahrt = 220 Kil. und

1) sin α = 0,016; 2) sin α = 0,012; 3) sin α = 0,008; 4) sin α = 0,014.

125. Ein Eilzug hat eine Geschwindigkeit = v erlangt. Welche Strecke s wird er noch nach abgesperrtem Dampfe zurücklegen, wenn der Widerstandskoeffizient f = 0,005 des Gewichtes, g = 9,8 m und

1) v = 12,6; 2) v = 11,9; 3) v = 11,2; 4) v = 10,5.

126. Welche Geschwindigkeit v hat ein Bahnzug nach der vor. Aufgabe erreicht, wenn derselbe nach abgesperrtem Dampfe noch eine Strecke = s zurücklegt, im Falle

1) s = 720; 2) s = 845; 3) s = 980; 4) s = 1280.

127. Wie groß muß das Gefälle eines Bahnkörpers sein, auf welchem der in der vor. Aufgabe beschriebene Zug seine Geschwindigkeit unverändert beibehält?

128. Welchen Verlust V an Geschwindigkeit erleidet ein Bahnzug in t Sek., wenn er mit einer Dampfkraft, welche eben hinreicht, die Widerstände auf horizontaler Bahn zu überwinden, eine Steigung sin α = 0,015 passiert, im Falle g = 9,8, f = 0,002 und

1) t = 170; 2) t = 190; 3) t = 150; 4) t = 220.

129. Ein Bahnzug hat auf einem Schienengeleise, dessen Widerstandskoeffizient f = 0,005 ist, eine konstante Geschwindigkeit = v. Wann würde der Zug bei unveränderter Dampfkraft still stehen, wenn plötzlich f = 0,01 würde, im Falle g = 9,8 m und

1) v = 10,29; 2) v = 10,78; 3) v = 11,27; 4) v = 11,76.

130. Wie groß berechnet sich die Dampfkraft einer Lokomotive, welche einem Zuge vom Gewichte $Q = 98000$ Kilogr. in t Sek. eine Geschwindigkeit $v = 9{,}6$ m mitteilt, wenn $g = 9{,}8$ m, $f = 0{,}002$ und

1) $t = 400$; 2) $t = 480$; 3) $t = 150$; 4) $t = 384$.

131. Welche mechanische Arbeit A ist aufzuwenden, um einem Wagen vom Gewichte $Q = 1960$ K. in 40 Sek. von der Ruhe aus eine Geschwindigkeit $= v$ mitzuteilen; welche Arbeit A_1 ist erforderlich, denselben in dieser Geschwindigkeit 30 Min. lang horizontal fortzubewegen, wenn $g = 9{,}8$, $f = 0{,}04$ und

1) $v = 1{,}4$; 2) $v = 1{,}2$; 3) $v = 1{,}5$; 4) $v = 2$.

132. Wie groß berechnet sich der Widerstand R und der Reibungskoeffizient f einer horizontalen Ebene, wenn ein mit der Geschwindigkeit v horizontal gleitender Körper vom Gewichte $Q = 20$ K. nach t Sek. zur Ruhe kommt, falls $g = 9{,}8$ und

1) $v = 15{,}68$;	2) $v = 31{,}36$;	3) $v = 29{,}4$;	4) $v = 48{,}02$
$t = 40$	$t = 64$	$t = 50$	$t = 70$

133. Wie groß berechnet sich der Reibungswiderstand R der Scheidelatten eines Pochstempels vom Gewichte $Q = 30$ K., wenn derselbe von einer Höhe $= h$ in t Sek. niederfällt, im Falle $g = 9{,}8$ und

1) $h = 0{,}6272$;	2) $h = 0{,}8085$;	3) $h = 0{,}882$;	4) $h = 0{,}9694$
$t = 0{,}4$	$t = 0{,}5$	$t = 0{,}6$	$t = 0{,}7$

134. Wie groß berechnet sich der Widerstandskoeffizient f und der Widerstand R auf einem horizontalen Schienengeleise, wenn ein ausgehängter Wagen vom Gewichte $Q = 4000$ K. und einer Geschwindigkeit $= v$ in t Sek. zur Ruhe kommt, im Falle $g = 9{,}8$ und

1) $t = 300$;	2) $t = 160$;	3) $t = 250$;	4) $t = 200$
$v = 7{,}35$	$v = 7{,}84$	$v = 8{,}33$	$v = 8{,}82$

135. Wie groß müßte der Widerstand R_1 eines Bremsapparates sein, wenn in der vorhergehenden Aufgabe unter denselben Umständen der Wagen in 50 Sekunden zur Ruhe kommen soll?

136. Wie groß berechnet sich der Reibungskoeffizient f einer schiefen Ebene von der Neigung α, wenn ein abwärts rollender Körper zu einer Strecke = s den zehnten Teil der Zeit mehr braucht, welche er ohne Reibung brauchen würde, im Falle

1) $\alpha = 15^0$; 2) $\alpha = 20^0$; 3) $\alpha = 24^0$; 4) $\alpha = 18^0$.

137. Ein Körper gleitet mit der Geschwindigkeit $v_0 = 30$ m über eine schiefe Ebene von der Neigung α geradlinig aufwärts. Welche Strecke s legt derselbe in der Zeit t zurück, wenn f = 0,005, g = 9,8, $\sin \alpha = 0,28$, im Falle

1) t = 5; 2) t = 10; 3) t = 15; 4) 1 = 20.

138. Nach welcher Zeit wird der Körper in der vorhergehenden Aufgabe umkehren?

139. Welche Kraft X im Umfange eines 3000 Kilogr. schweren Wasserrades überwindet den Widerstand der Zapfenreibung, wenn r und ϱ die Radien von Rad und Zapfen sind, im Falle f = 0,075 und

1) r = 5; 2) r = 4,5; 3) r = 5,2; 4) r = 5,1
$\varrho = 0,14$ $\varrho = 0,16$ $\varrho = 0,13$ $\varrho = 0,17$

140. Welche mechanische Arbeit A geht in der vor. Aufg. durch die Zapfenreibung bei einer Umdrehung verloren?

141. Welche Stoßkraft P übt ein unelastischer Körper von Q Kilogr. auf eine horizontale Unterlage aus, wenn derselbe von einer Höhe = h herabfällt und seine Geschwindigkeit in 0,1 Sekunde verliert, im Falle

1) Q = 12; 2) Q = 140; 3) Q = 80; 4) Q = 250
h = 15 h = 25 h = 9,2 h = 12,4

142. Von welcher Höhe h muß ein 5 Kilogr. schwerer Körper auf einen Nagel fallen, damit er denselben s Meter tief in ein hartes Holz eintreibe, welches den Widerstand R leistet, wenn

1) R = 200; 2) R = 250; 3) R = 300; 4) R = 320
s = 0,007 s = 0,004 s = 0,006 s = 0,008

143. Ein Rammbär (Rammklotz, Hoyer) vom Gewichte P

fällt von einer Höhe = 1,2 m auf einen Pfahl vom Gewichte Q und treibt ihn mit 4 Schlägen s Meter tief in den Boden. Wie groß ist die mechanische Arbeit des Rammbärs und wie groß der Widerstand des Bodens, wenn

1) P = 300;	2) P = 400;	3) P = 350;	4) P = 420
Q = 200	Q = 240	Q = 250	Q = 280
s = 0,04	s = 0,05	s = 0,07	s = 0,03

144. Ein Pfahl soll so in den Boden geschlagen werden, daß er eine Belastung von R Kilogr. zu tragen fähig ist. Wie tief darf derselbe mit den letzten 25 Schlägen noch eindringen, wenn der Rammbär 540, der Pfahl 460 Kilogr. wiegt und die Fallhöhe 1,2 m beträgt, im Falle

1) R = 6210; 2) R = 9936; 3) R = 12420; 4) R = 18630.

145. Eine unelastische Kugel von Q Kilogr. trifft central eine ruhende Kugel von Q_1 Kilogr. mit der Geschwindigkeit v; bestimme Q_1, wenn die Geschwindigkeit nach dem Stoße = 20 m ist, im Falle

1) Q = 12;	2) Q = 28;	3) Q = 4,8;	4) Q = 6,8
v = 30	v = 26	v = 35	v = 45

146. Eine vertikal aufwärts geworfene Kugel von 7 Kilogr. trifft in einer Höhe = h einen ruhenden Gegenstand von 3 Kilogr. Wie hoch werden beide Körper nach dem unelastischen Stoße noch steigen, wenn die Wurfgeschwindigkeit = v_0, g = 9,8 m, im Falle

1) h = 4,4;	2) h = 4,1;	3) h = 5,6;	4) h = 3,6
v_0 = 12	v_0 = 9	v_0 = 21	v_0 = 14

Welche Bewegungen werden die beiden Körper ausführen, wenn der Stoß vollkommen elastisch ist?

147. Eine unvollkommen elastische Kugel fällt von einer Höhe = h auf eine horizontale Ebene und springt jedesmal mit der halben erlangten Geschwindigkeit vertikal zurück. Wie hoch steigt sie mit dem 3. Rücksprung, wenn

1) h = 64; 2) h = 48; 3) h = 32; 4) h = 16.

148. Während ein unelastischer Körper von Q Kilogr.

über eine glatte schiefe Ebene von der Länge s und Neigung α von oben zu gleiten anfängt, wird gleichzeitig ein anderer Körper von Q_1 Kilogr. dem ersteren mit der Anfangs-Geschwindigkeit v_0 von unten entgegen geworfen, so daß sie sich begegnen müssen. Mit welcher Geschwindigkeit kommen beide nach dem Stoße unten an, wenn $\sin\alpha = \frac{4}{49}$, $g = 9{,}8$ und

1) $Q = 20$; $Q_1 = 5$; $v_0 = 5$; $s = 6{,}25$
2) $Q = 80$; $Q_1 = 20$; $v_0 = 10$; $s = 25$
3) $Q = 156$; $Q_1 = 13$; $v_0 = 13$; $s = 16{,}25$
4) $Q = 180$; $Q_1 = 45$; $v_0 = 15$; $s = 56{,}25$

149. Wie lange dauert die Bewegung in Aufg. 148 vor und nach dem Zusammenstoße?

150. Ueber eine glatte schiefe Ebene von der Neigung α gleiten, gleichzeitig in den verschiedenen Punkten A und B von der Ruhe aus beginnend, zwei Kugeln von gleichen Massen in derselben Geraden abwärts und erreichen beide in C die Horizontalebene, wo sie ungehindert ihren Lauf fortsetzen können. Nach welcher Zeit werden beide aufeinander treffen, und welches ist ihre gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoße, wenn $AC = s$, $BC = s_1$, $g = 9{,}8$ m, $\sin\alpha = 0{,}1$, im Falle

1) $s = 24{,}01$;	2) $s = 17{,}64$;	3) $s = 12{,}25$;	4) $s = 7{,}84$
$s_1 = 17{,}64$	$s_1 = 12{,}25$	$s_1 = 7{,}84$	$s_1 = 4{,}31$